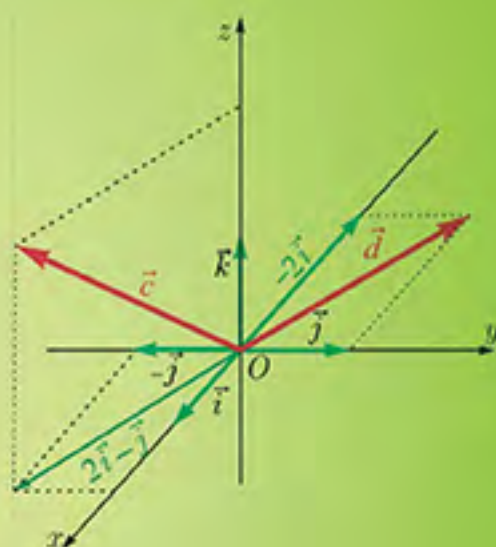
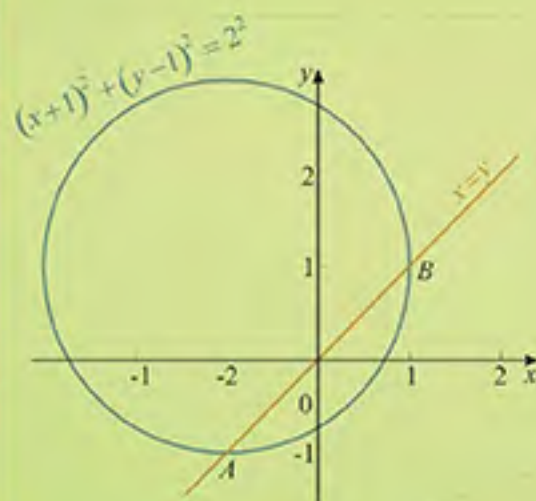


MATEMATIKA

për vitin III të arsimit të mesëm
profesional katërvjeçar
(lëndë zgjedhore)



DREJTIMI/SEKTORI

Gjeologji-xehetari dhe metalurgji/Gjeologjia, xehetaria dhe metalurgjia,
Ndërtimtari-gjeologji/Ndërtimtaria dhe gjeodezia,
Grafik/Grafiteri,
Ekonomik-juridik dhe tregtar/Ekonomi, drejtësi dhe tregti,
Elektroteknik/Elektroteknika,
Shëndetësi/Shëndetësia dhe mbrojtja sociale,
Bujqësi-veterinari/Bujqësia, peshkimi dhe veterinaria,
Shërbime profesionale,
Makinieri/Makineria,
Komunikacion/Komunikacioni, transporti dhe deponimi,
Tekstil-lëkurë/Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme,
Hoteleri-turistik/Hoteleri dhe turizëm dhe
Pylltari -drupunues/Pylltaria dhe përpunimi i drurit)

Biljana Kërsteska

Jasmina Markoska

MATEMATIKA

për vitin III të arsimit të mesëm
profesional katërvjeçar
(lëndë zgjedhore)

MATEMATIKA

për vitin III të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar (lëndë zgjedhore)

Autore:

Biljana Kërsteska

Jasmina Markoska

Recensentë:

Biljana Zlatanovska

Aleksdandra Dameska

Jelena Baboviç Najdova

Ilustrimet:

Biljana Kërsteska

Jasmina Markoska

Titulli original:

МАТЕМАТИКА

за III година на средното стручно четиригодишно образование (изборен)

Билјана Крстеска, Јасмина Маркоска

Përkthyer nga gjuha maqedonase: Muzafer Beqiri

Redaktor profesional i botimit në gjuhën shqipe: Xhevair Beqiri

Redaktor: Refail Sulejmani

Lektor: Refail Sulejmani

Botues: Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut,
rr. “Shën Kirili dhe Metodi” nr. 54 1000 Shkup

Rregullimi grafik-teknik: Eli Vasilevska Ilievska – ARS Studio

Vendi dhe viti i botimit: Shkup, 2024

Me vendim për lejimin e tekstit shkollor MATEMATIKA (lëndë zgjedhore), për vitin III të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar (drejtimet: Gjeologji-xehetari dhe metalurgji/Gjeologjia, xehetaria dhe metalurgjia, Ndërtimtari-gjeologji/Ndërtimtaria dhe gjeodezia, Grafik/Grafiteri, Ekonomik-juridik dhe tregtar/Ekonomi, drejtësi dhe tregti, Elektroteknik/Elektroteknika, Shëndetësi/Shëndetësia dhe mbrojtja sociale, Bujqësi-veterinari/Bujqësia, peshkimi dhe veterinarja, Shëmbime profesionale, Makineri/Makineria, Komunikacion/Komunikacioni, transporti dhe deponimi, Tekstil-lëkure/Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme, Hoteleri-turistik/Hoteleri dhe turizëm dhe Pylltari -drupunues/Pylltaria dhe përpunimi i drurit) nr. 26-2145/1 të datës 4.9.2023 të miratuar nga Komisioni nacional për tekste shkollore.

PARATHËNIE

Teksti **MATEMATIKA** për vitin e tretë të arsimit profesional katërvjeçar është shkruar sipas programit mësimor për lëndën e njëjtë zgjedhore. I dedikuar për nxënësit e drejtimin Gjeologjik - xehetari dhe metalurgji, sektori Gjeologjia, xehetaria dhe metalurgjia, Drejtimi ndërtimtari-gjeodet, sektori Ndërtimtari dhe gjeodezi, Drejtimi grafik, sektori Grafiteri, Ekonomike -juridike dhe tregtare, sektori Ekonomi, juridik dhe tregtar, Drejtimi Elektroteknik, sektori Elektroteknik, drejtimi Shëndetësor, sektori Shëndetësi dhe mbrojtja sociale, drejtimi Bujqësor-veterinari, sektori Bujqësor, peshkim dhe veterinari, drejtimi Shërbime profesionale, sektori Shërbime profesionale, drejtimi Makineri, sektori Makineri, drejtimi Komunikacion, sektori Komunikacion, transport dhe deponim, drejtimi Tekstil-lëkurë, sektori Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme, drejtimi Hoteleri-turizëm, sektori Hoteleri dhe turizëm dhe Pylltari-drupunues, sektori Pylltari dhe përpunimi i drurit.

Autorët përpiqen t'i përpunojnë përmbajtjet e parashikuara në pajtim me udhëzimet didaktike-metodike për realizimin e programit. Teksti është dizajnuar modularisht dhe përbëhet prej pesë njësive modulare:

- Sistem të barazimeve katrore me një të panjohur (bërthama)
- Sistem i pabarazimeve lineare me dy të panjohura (bërthama)
- Llogaria e interesit të përbërë (bërthama)
- Induksioni matematikor (bërthama)
- Numrat kompleks (për drejtimin elektro)
- Zgjidhja e trekëndëshit këndngushtë (për drejtimin e makinerisë)
- Vektorët në hapësirë (për drejtimin e elektro dhe makinerisë)
- Matrica (për drejtimin ekonomik)
- Funksionet elementare. Vlera kufitare e funksionit (për drejtimin ekonomik)

Në kuadër të çdo teme mësimore janë përpunuar përmbajtjet e parashikuara, të cilat, sipas rregullës, janë ilustruar me shembuj dhe vizatime të zgjidhura. Në fund të çdo njësie mësimore janë dhënë detyra për punë të pavarur në orë të mësimit ose për detyrë shtëpie, që paraqet vazhdimin e punës së orës, kurse në fund të çdo teme mësimore janë dhënë detyra për përsëritje dhe përforcim të materialit. Zgjidhjet dhe përgjigjet e detyrave, por sipas zgjedhjes së autorëve, diku edhe udhëzime për zgjidhjen e tyre, janë dhënë në fund të tekstit.

Autorët prej përpara do t'u falënderohen për çdo kritike me qëllim të mirë ose vërejtje për përmirësimin e përmbajtjes, pasi besojnë se ky libër do të kontribuon nxënësit më shumë ta duan matematikën dhe të hyjnë në fshetësitë e saj.

1. SISTEMI I BARAZIMEVE KATRORE ME DY TË PANJOHURA

1.1. Sistem prej një barazimi katror dhe barazimi linear me dy të panjohura

Bashkësia prej dy barazimeve me dy të panjohura të njëjta quhet **sistem barazimesh me dy të panjohura**. Zgjidhje e sistemit të barazimeve me dy të panjohura është çdo çift i renditur të vlerave të panjohurave (x_0, y_0) , që është zgjidhje e çdonjërës prej barazimeve të sistemit. Të zgjidhet sistemi i barazimeve të dhëna me dy të panjohura domethënë të caktohet bashkësia e të gjitha zgjidhjeve të tija domethënë, të caktohen zgjidhjet e përbashkëta të çdonjërës prej barazimeve të sistemit, në bashkësinë e numrave real $\mathbb{R}$.

Dy sisteme të barazimeve me dy të panjohura janë **ekuivalente** nëse kanë bashkësi të barabarta të zgjidhjeve. Nëse njëra prej barazimeve të sistemit e zëvendësojmë me barazimin ekuivalent të saj fitojmë sistem ekuivalent me sistemin e dhënë.

Sistemi prej dy barazimeve prej të cilave njëri është barazim linear me dy të panjohura, kurse tjetri barazim katror me dy të panjohura quhet sistem prej **barazimit linear dhe katror me dy të panjohura**. Për këtë shkak teoremat për barazime ekuivalente, çdo sistem prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura është ekuivalent me sistemin e llojit

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

të quajtur **forma e përgjithshme e sistemit prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura** me koeficientët m, n, p, a, b, c, d, e dhe f , ku të paktën njëri prej koeficientëve a, b, c është i ndryshueshëm prej zeros dhe koeficientët a, b, d ose b, c, e dhe m, n nuk janë njëkohësisht të barabartë me zero.

Shembulli 1. Sistemi

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3 \\ \frac{1}{9}x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2 \end{cases}$$

është sistem prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura. Ai është ekuivalent me sistemin

$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Çifti i renditur $(0, -3)$ është zgjidhje e sistemit të dhënë, kurse çifti i renditur $(1, 2)$ nuk është zgjidhje e tij. Me të vërtetë, kemi se

$$\begin{cases} 0 - 3 \cdot (-3) - 9 = 0 \\ 0^2 + (-3)^2 - 9 = 0 \end{cases}, \text{ por } \begin{cases} 1 - 3 \cdot 2 - 9 \neq 0 \\ 1^2 + 2^2 - 9 \neq 0 \end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit prej një barazimi linear dhe barazimi katror me dy të panjohura

Ta ilustruim me shembull metodën për zgjidhjen e sistemit prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura.

Shembulli 2. Ta zgjidhim sistemin prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Prej barazimit të parë të sistemit kemi $x = 10 - y$. Duke zëvendësuar shprehjen e fituar për x te barazimi i dytë e fitojmë barazimin

$$(10 - y)^2 + y^2 = 0$$

që është ekuivalent me barazimin katror

$$y^2 - 10y + 50 = 0$$

rrënjët e të cilit janë

$$y_1 = 5 + 5i \text{ dhe } y_2 = 5 - 5i.$$

Duke zëvendësuar vlerat e fituara për y i fitojmë vlerat përkatëse për x :

$$x_1 = 5 - 5i \text{ dhe } x_2 = 5 + 5i.$$

Prandaj, zgjidhjet e sistemit të dhënë janë çiftet e renditura

$$(5 - 5i, 5 + 5i) \text{ dhe } (5 + 5i, 5 - 5i).$$

$$\text{Kontrolli: } \begin{cases} 5 - 5i + 5 + 5i = 10 \\ (5 - 5i)^2 + (5 + 5i)^2 = 0 \end{cases} \text{ dhe } \begin{cases} 5 + 5i + 5 - 5i = 10 \\ (5 + 5i)^2 + (5 - 5i)^2 = 0 \end{cases}.$$

Shembulli 3. Sistemi $\begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$ ka pafund shumë zgjidhje domethënë, çdo element prej bashkësisë $M = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ është zgjidhje e sistemit.

Shembulli 4. Ta zgjidhim sistemin prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ 5x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 2y - 11 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Prej barazimit të parë të sistemit kemi } x = -\frac{3y + 5}{2}.$$

Me zëvendësimin e shprehjes së fituar për x te barazimi i dytë i sistemit e fitojmë barazimin:

$$5\left(-\frac{3y + 5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3y + 5}{2}\right)y - y^2 + 3\left(-\frac{3y + 5}{2}\right) - 2y - 11 = 0$$

që është ekuivalent me barazimin katror

$$29y^2 + 104y + 51 = 0,$$

rrënjët e të cilit janë $y_1 = -3$ dhe $y_2 = -\frac{17}{29}$. Duke i zëvendësuar vlerat e fituara për y fitojmë

vlera përkatëse për x :

$$x_1 = -\frac{-9+5}{2} = 2 \text{ dhe } x_2 = -\frac{-\frac{51}{29}+5}{2} = -\frac{94}{58} = -\frac{47}{29}.$$

Prandaj, zgjidhjet e sistemit të dhënë janë çiftet e renditura

$$(2, -3) \text{ dhe } \left(-\frac{47}{29}, -\frac{17}{29}\right).$$

$$\text{Kontrolli: } \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 = 0 \\ 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3)^2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 11 = 0 \end{cases} \text{ dhe}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) + 5 = 0 \\ 5 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - \left(-\frac{17}{29}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - 11 = 0 \end{cases}.$$

Sikurse që treguam forma e përgjithshme e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura është

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Të supozojmë se $m \neq 0$. Nëse te barazimi i parë e shprehim njërën të panjohur nëpërmjet tjetrës, për shembull $x = -\frac{p+ny}{m}$, dhe kështu shprehjen e fituar për x e zëvendësojmë te barazimi i dytë e fitojmë sistemin

$$\begin{cases} x = -\frac{p+ny}{m} \\ a\left(-\frac{p+ny}{m}\right)^2 + b\left(-\frac{p+ny}{m}\right)y + cy^2 + d\left(-\frac{p+ny}{m}\right) + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Sistemi i sipërm është ekuivalent me sistemin e dhënë, pasi është fituar me zbatimin e transformime ekuivalente. Zgjidhjet e fituara sipas y te barazimi i dytë prej sistemit i zëvendësojmë te barazimi i parë i sistemit. Në këtë mënyrë fitojmë zgjidhje përkatëse sipas x .

Duhet të kemi parasysh se çdo barazim linear me dy të panjohura gjeometrikisht paraqet drejtëz, kurse çdo barazim katror me dy të panjohura paraqet lakore të rendit të dytë (vijë rrethore, elipsë, hiperbolë ose parabolë). Interpretimi gjeometrik i zgjidhjes së sistemit prej një barazimi linear dhe një barazimi katror me dy të panjohura është në reralitet analiza e raportit reciprok që e kanë drejtëza dhe lakorja.

Shembulli 5. Ta shqyrtojmë interpretimin gjeometrik të sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Barazimin e parë te sistemi mund ta shkruajmë sikurse $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ që gjeometrikisht është vija rrethore me qendër në $C(-1,1)$ dhe me rreze $r = 2$, por

barazimi i dytë gjeometrikisht është drejtëz që kalon nëpër pikat $(0,0)$ dhe $(1,1)$. Nëse prej atij barazimi zëvendësohet $y = x$ te barazimi i parë fitohet $x^2 = 1$ zgjidhjet e të cilit janë $x_{1/2} = \pm 1$, domethënë $y_{1/2} = \pm 1$.

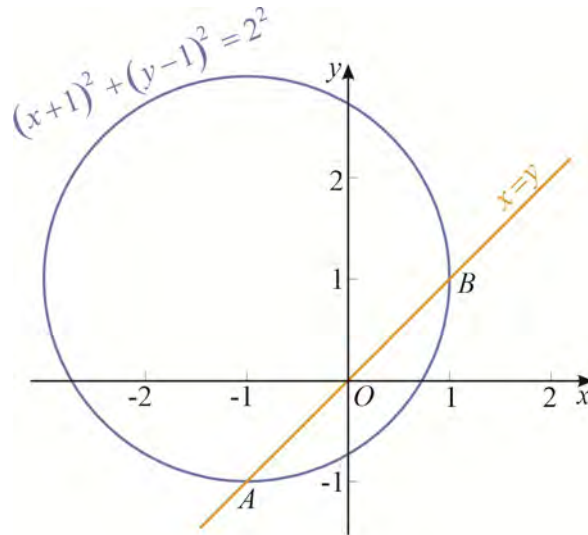


Figura 1

Prandaj, zgjidhja e sistemit janë çiftet e renditura $(-1,-1)$ dhe $(1,1)$ domethënë, pikat A dhe B te figura 1, të cilat janë pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore.

Detyra

1. Cilët prej këtyre sistemeve prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

a) $\begin{cases} 2x = y \\ y^2 + xy = 4y \end{cases};$

b) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x^2 + xy - 3 = y^2 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + xy^2 = 4 \end{cases};$

ç) $\begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x^2z + 3z^2 = 6 \end{cases};$

d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 0 \\ x^2 + \sqrt{3}y^2 = 2x - y \end{cases};$

dh) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 0 \\ x^2 = -\sqrt{5}y^2 \end{cases};$

2. Çifti i renditur $(1,-2)$ a është zgjidhje e sistemit të barazimit linear dhe katror:

a) $\begin{cases} 4x = 2 - y \\ x^2 + 3xy + 3y^2 = 7 \end{cases};$

b) $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + \frac{1}{2}xy + 5y^2 - 3 = 0 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases};$

3. Cilët prej këtyre çifteve është zgjidhje e sistemit të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x-1)^2 + xy + y^2 + 3y = 5 \end{cases};$

a) $(0,1);$

b) $\left(3, \frac{1}{2}\right);$

c) $(6,-5);$

ç) $(1, -\sqrt{2}).$

4. Transformoje sistemin e dhënë në formën e përgjithshme:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x = 1 - y \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases}; & \text{b)} \begin{cases} \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}x - 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy = y^2 + \frac{1}{2} \end{cases}; \\ \text{c)} \begin{cases} x = z - 4 \\ x^2 + 2z^2 = x - 3z + \frac{1}{2} \end{cases}; & \text{ç)} \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 = 1 - x \end{cases}; \\ \text{d)} \begin{cases} y = 10 + x \\ (x-1)^2 + 2(y-3)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}; & \text{dh)} \begin{cases} \frac{1}{2}x = -\sqrt{3}y \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}. \end{array}$$

5. Zgjidhe sistemin e barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x = 8 - y \\ xy = 15 \end{cases}; & \text{b)} \begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}; & \text{c)} \begin{cases} 2(x-3) = 6(x-y) \\ xy = 4 \end{cases}; \\ \text{ç)} \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x^2 - 2y^2 = 10 \end{cases}; & \text{d)} \begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0 \end{cases}. & \end{array}$$

6. Cilët prej këtyre sistemeve kanë zgjidhje reale, kurse cilët zgjidhje komplekse të konjuguara?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}; & \text{b)} \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}; & \text{c)} \begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}; \\ \text{ç)} \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 1 - x \end{cases}; & \text{d)} \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2(x-2)^2 + \frac{1}{3}(y-3)^2 = -1 \end{cases}; & \text{dh)} \begin{cases} x = 1 + y \\ 3xy = 0 \end{cases}. \end{array}$$

1.2. Sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura

Përkufizimi 1. Sistemi i formës

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

ku anët e majta të dy barazimeve janë polinome të shkallës së dytë me dy ndryshore, quhet **sistem prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura**.

Të zgjidhet sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura do të thotë të caktohet bashkësia e çifteve të renditura (x_0, y_0) për të cilën sistemi kalon në identitet kur x do të zëvendësohet me x_0 , kurse y me y_0 , përkatësisht

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0y_0 + c_1y_0^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 = 0 \\ a_2x_0^2 + b_2x_0y_0 + c_2y_0^2 + d_2x_0 + e_2y_0 + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Nëse sistemi ka të paktën një zgjidhje, themi se ai është **i zgjidhshëm**, kurse nëse ai nuk ka asnjë zgjidhje, atëherë për atë themi se është **kundërthënës**.

Shembulli 1. Çifti i renditur $(1,1)$ nuk është zgjidhje e sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = \frac{3}{2}(x + y) \\ 5x^2 - xy - y^2 = 7(x + y) \end{cases}$$

pasi duke zëvendësua $x = 1$ dhe $y = 1$ nuk fitohet identitet për barazimin e dytë.

Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura nuk ka metodë të përgjithshme: Shpeshherë duhet të bëhet kombinim prej disa transformimeve si zëvendësim të ndonjë shprehje, eliminimi i të panjohurës ose anëtari i lirë dhe të ngjashme.

Forma e thjeshtë e sistemit prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura është sistemi

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 = c_2 \end{cases}.$$

Zgjidhja e këtij sistemi kryhet nëpërmjet të eliminimit të x^2 ose y^2 , por pastaj zgjidhjet e barazimit jo të plotë katror të fituar.

Shembulli 2. Sistemi $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ 3x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$ do të zgjidhet së pari me eliminimin e

y^2 domethënë, së pari barazimin e dytë do ta shumëzojmë me 3, kurse pastaj do t'i mbledhim barazimet dhe kemi $2x^2 + 3y^2 + 3(3x^2 - y^2) = 14 + 3 \cdot 10$ domethënë, $11x^2 = 44$, prej ku kemi se $x^2 = 4$. Me zëvendësimi te njëri prej sistemit kemi $y^2 = 2$. Duke pasur parasysh $x_{1/2} = \pm 2$ dhe $y_{1/2} = \pm \sqrt{2}$ fitohen zgjidhjet

$$(2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (-2, \sqrt{2}) \text{ dhe } (-2, -\sqrt{2})$$

Zbulimi i lidhjes lineare ndërmjet të panjohurave te sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura

Nëse sistemi është i formës

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ xy = d \end{cases}, \text{ për } a, b > 0,$$

atëherë barazimi i dytë zgjerohet përkatësisht me $2\sqrt{ab}$ ashtu duke mbledhur dhe zbritur te kjo shprehje me anën e majtë të barazimit të parë fitohet katror i plotë domethënë $ax^2 \pm 2\sqrt{ab}xy + by^2 = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{b}y)^2$. Në këtë mënyrë fitohet lidhje lineare ndërmjet ndryshoreve te sistemi.

Shembulli 3. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 26 \\ 3xy = 5 \end{cases}$.

Nëse barazimin e dytë e shumëzojmë me 2 dhe ia shtojmë barazimit të parë, atëherë $x^2 + 6xy + 9y^2 = 26 + 10$ domethënë $(x + 3y)^2 = 36$. Prej barazimit të majtë fitohen dy lidhje lineare ndërmjet ndryshoreve $x + 3y = 6$ ose $x + 3y = -6$, pra së bashku

me barazimin e dytë i japin sistemet $\begin{cases} x+3y=6 \\ 3xy=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x+3y=-6 \\ 3xy=5 \end{cases}$. Nëse tani, barazimi i dytë i shumëzuar me 2 e zbresim prej barazimit të parë, atëherë do të fitojmë $x^2 - 6xy + 9y^2 = 26 - 10$ domethënë $(x - 3y)^2 = 16$. Prej këtij barazimi fitohen dy lidhje lineare ndërmjet ndryshoreve $x - y = 4$ ose $x - 3y = -4$, pra së bashku me barazimin e dytë i japin sistemet $\begin{cases} x-3y=4 \\ 3xy=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x-3y=-4 \\ 3xy=5 \end{cases}$. Zgjidhjet e sistemit janë $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$, që janë zgjidhje të sistemit fillestar.

Në mënyrë analoge mund të zbatohet kur sistemi është i formës

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ xy = e \end{cases}.$$

Barazimi i dytë zgjerohet ashtu që duke shtuar, përkatësisht zbritur prej barazimit të parë ana e majtë prej barazimit të parë do të bëhet katror i plotë.

Detyra

1. Provo se çifti $(1,1)$ a është zgjidhje e sistemit:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 2x + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 2y - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 - 3xy \\ x^2 - xy + y^2 + 2y = 3 \end{cases}.$$

2. Zgjidhe sistemin:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -2x^2 + 3y^2 = 25 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + 5y^2 = 9 \end{cases}.$$

3. Zgjidhe sistemin:

$$\text{a) } \begin{cases} (2x+3y)^2 = 7y \\ (3x+2y)^2 = 7y \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} (7x-2y)^2 = 25y \\ (2x-7y)^2 = 25y \end{cases}.$$

4. Zgjidhe sistemin:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 = 4y+1 \\ x^2 + 3 = 4y + y^2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 = 2y-7 \\ x^2 + 23 = 2y + y^2 \end{cases}.$$

5. Zgjidhe sistemin:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ xy = 6 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}.$$

1.3. Sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura prej të cilave njëri është homogjen

Para se të kalojmë në shqyrtimin e sistemit prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura prej të cilave njëri është barazim homogjen, do të ndalemi pak te barazimi homogjen me dy të panjohura.

Barazimi katror homogjen me dy të panjohura

Përkufizimi 1. Barazimi i formës

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0$$

quhet **barazim homogjen me dy të panjohura prej rendit n** .

Në rastin e veçantë, për $n = 2$ fitohet barazimi $a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$.

Përkufizimi 2. Barazimi $a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$ quhet barazim homogjen të rendit të dytë me dy të panjohura ose **barazim katror homogjen me dy të panjohura**.

Një mënyrë e zgjidhjes së barazimit katror homogjen me dy të panjohura mund të shkruhet në formën

$$y^2 \left(\frac{a_0x^2}{y^2} + \frac{a_1xy}{y^2} + \frac{a_2y^2}{y^2} \right) = 0 \text{ d.mth. } y^2 \left(a_0 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + a_1 \frac{x}{y} + a_2 \right) = 0.$$

Prej këtij prodhimi vijon bashkësia

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ a_0 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + a_1 \left(\frac{x}{y} \right) + a_2 = 0 \end{cases}.$$

Nëse $y^2 = 0$, domethënë $y = 0$ dhe $x = 0$, pra $(0,0)$ është zgjidhje e barazimi. Le të jetë $y \neq 0$. Nëse vendojmë $t = \frac{x}{y}$ te barazimi i dytë prej bashkësisë do të fitohet barazimi sipas të panjohurës t . Me zgjidhjen e tij dhe zëvendësimi $x = ty$ te barazimi fillestar fitohet barazimi katror me një të panjohur, x .

Mënyra tjetër e zgjidhjes së barazimit homogjen është nëse e vërejmë se barazim katror me të panjohurën x ose y .

Shembulli 1. Është dhënë barazimi $3x^2 - 2xy - y^2 = 0$. Ta caktojmë vlerën e $\frac{x}{y}$.

Qartë se $(0,0)$ është zgjidhje e barazimit. Të supozojmë se $y \neq 0$, pastaj pjesëtimi i barazimit me y^2 fitohet $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$. Me

zëvendësimin $t = \frac{x}{y}$ fitohet barazimi $3t^2 - 2t - 1 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = \frac{1}{3}$ dhe $t_2 = 1$. Kjo do të thotë se vlera e $\frac{x}{y}$ është $-\frac{1}{3}$ dhe 1.

Shembulli 2. Ta caktojmë vlerën e xy te barazimi $3x^2 + \frac{5x}{y} - \frac{8}{y^2} = 0$.

Nëse barazimin e shumëzojmë me y^2 fitohet $3(xy)^2 + 5xy - 8 = 0$, prej ku me zëvendësimin $xy = t$ fitohet barazimi $3t^2 + 5t - 8 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = \frac{8}{3}$ dhe $t_2 = 1$.

Në vazhdim do të ndalemi te disa raste speciale të sistemit prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura për të cilat në një lloj zëvendësimi ekziston metoda e përgjithshme për gjetjen e zgjidhjes.

Sistemet homogjene

Përkufizimi 3. Sistemi i formës

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

quhet **sistem homogjen prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura**.

Domethënë, sistem homogjen prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura është sistem prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura të cilat një barazim katror është homogjen.

Mënyra për zgjidhjen e sistemit përbëhet prej këtyre katër hapave:

- Kontrollonjmë se $x = 0, y = 0$ a është zgjidhje e sistemit.
- Për $x \neq 0, y \neq 0$ pjesëtojmë barazimin e parë me x^2 (ose me y^2), kurse pastaj e fusim zëvendësimin

$$t = \frac{y}{x} \quad (\text{ose } t = \frac{x}{y}).$$

Pra, nëse t_1 dhe t_2 shfrytëzohet barazimi katror

$$c_1t^2 + b_1t + a_1 = 0 \quad (\text{ose } a_1t^2 + b_1t + c_1 = 0),$$

atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit homogjen (1) është unioni i bashkësive të zgjidhjeve të sistemeve

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{dhe} \quad \begin{cases} t_2 = \frac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Domethënë, sistemi homogjen prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura sillet në sistem të cilin mund të gjendet lidhja lineare ndërmjet të panjohurave.

Shembulli 3. Zgjidhe sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$$

Në hapin e parë kontrollojmë se $x = 0, y = 0$ a është zgjidhje e sistemit. Është e qartë për $x = 0$ prej barazimit të parë kemi se $y = 0$, kurse $x = 0, y = 0$ nuk është zgjidhje e barazimit të dytë të sistemit të dhënë. Pra, $x = 0, y = 0$ nuk është një zgjidhje për sistemin e dhënë

Le të jetë $x \neq 0$. Pjesëtojmë barazimin e parë me x^2 , pastaj fusim zëvendësimin $t = \frac{y}{x}$. E fitojmë barazimin katror $-2t^2 - t + 1 = 0$ rrënjët e të cilit janë $t_1 = -1$ dhe $t_2 = \frac{1}{2}$. Atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit homogjen është unioni prej bashkësisë të zgjidhjeve të sistemeve

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = -1 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{dhe} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. \end{cases}$$

Prej këtu fitojmë sistemin e dhënë me çiftet e renditura

$$(1, -1), (3, -3), \left(-13 - \sqrt{157}, \frac{1}{2}(-13 - \sqrt{157})\right), \left(-13 + \sqrt{157}, \frac{1}{2}(-13 + \sqrt{157})\right).$$

Shembulli 4. Zgjidhe sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 2x^2 + 25xy - 8y^2 = 5 \end{cases}$$

Sistemi i dhënë nuk është sistem homogjen prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura, kurse mund ta sjellim në homogjen nëse barazimin e parë e shumëzojmë me 5, të dytën me -1 dhe pastaj i mbledhim. Sistemi i ri që është homogjen dhe ekuivalent me të dhënin është

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Kontrollojmë se $x = 0, y = 0$ a është zgjidhje e sistemit. Qartë është se $x = 0, y = 0$ nuk është zgjidhje e sistemit të dhënë.

Të supozojmë se $y \neq 0$. Pjesëtojmë barazimin e dytë me y^2 pastaj fusim zëvendësimin $t = \frac{x}{y}$. Fitojmë barazim katror $3t^2 - 10t + 3 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t_1 = 3$ dhe $t_2 = \frac{1}{3}$. Atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit homogjen të dhënë është union prej bashkësive të zgjidhjeve të sistemeve

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \quad \text{dhe} \quad \begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Prej këtu fitojmë se zgjidhjet e sistemit të dhënë janë çiftet e renditura

$$(1,3), (-1,-3), \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) \text{ dhe } \left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Sistemet simetrike

Lloj tjetër i sistemeve prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura për të cilët ekziston metodë për gjetjen e zgjidhjeve janë sistemet simetrike.

Përkufizimi 4. Sistemi i formës

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + a_1y^2 + d_1x + d_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + a_2y^2 + d_2x + d_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

quhet **sistem simetrike prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura**.

Për ta zgjidhur atë sistem fusim zëvendësimin

$$x + y = u \text{ dhe } xy = v.$$

Atëherë barazimi i parë e ka formën

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1xy + a_1y^2 + d_1x + d_1y + f_1 &= \\ &= a_1(x^2 + 2xy + y^2) - 2xy + b_1xy + d_1(x + y) + f_1 = \\ &= a_1u^2 + (b_1 - 2)v + d_1u + f_1 = 0 \end{aligned}$$

por i dyti $a_2u^2 + (b_2 - 2)v + d_2u + f_2 = 0$.

Pastaj, me eliminimin e u^2 sistemi sillet në sistem prej një barazimi katror dhe barazimi linear me dy të panjohura u dhe v . Nëse (u_0, v_0) është zgjidhje e sistemit të ri, atëherë te ai korrespondojnë këto sisteme sipas të panjohurave x dhe y :

$$\begin{cases} x + y = u_0 \\ xy = v_0 \end{cases}.$$

Sipas formulave të Vietit fitojmë se zgjidhjet e sistemit të fundit janë pikërisht zgjidhjet e barazimit katror

$$z^2 - u_0z + v_0 = 0.$$

Prandaj, nëse z_1 dhe z_2 shfrytëzohet barazimi katror, atëherë zgjidhjet e sistemit janë çiftet $x_1 = z_1, y_1 = z_2$ dhe $x_2 = z_2, y_2 = z_1$.

Shembulli 5. Zgjidhe sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + 2xy + y = 1 \end{cases}.$$

Për ta zgjidhur sistemin e dhënë simetrik prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura fusim zëvendësimin $x + y = u$ dhe $xy = v$. Atëherë kemi

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v \text{ dhe } x + 2xy + y = u + 2v,$$

pra të panjohurat e reja u dhe v e fitojmë sistemin

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 5 \\ u + 2v = 1 \end{cases}.$$

Nëse i mbledhim të dy anët e sistemit të fundit e fitojmë barazimin katror $u^2 + u - 6 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $u_1 = 2$ dhe $u_2 = -3$. Prej këtu gjejmë se zgjidhjet e sistemit të ri janë

$$u_1 = 2, v_1 = -\frac{1}{2} \text{ dhe } u_2 = -3, v_2 = 2.$$

Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dhënë është unioni prej bashkësisë së zgjidhjeve të sistemeve

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ dhe } \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

Zgjidhjet e tyre përputhen me zgjidhjet e barazimeve katrore

$$z^2 - 2z - \frac{1}{2} = 0, \text{ dhe } z^2 + 3z + 2 = 0.$$

Përfundimisht, fitojmë se zgjidhjet e sistemit simetrik janë çiftet e renditura

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right), (-1, -2), (-2, -1).$$

Metoda vijuese ka për qëllim njëzën prej të dy barazimeve të sistemi ta shndërron në homogjen.

Ta shqyrtojmë sistemin

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Nëse barazimin e parë e shumëzojmë me f_1 , të dytin me $-f_2$ dhe i mbledhim të dy barazimet, atëherë do të fitojmë barazim katror me dy të panjohura e cila me cilëndo prej të dy barazimeve fillestare jep sistem prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura prej të cilave njëri është homogjen.

Shembulli 6. Zgjidhe sistemin
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 - 3xy + y^2 = -5 \end{cases}.$$

Nëse barazimin e parë e shumëzojmë me 5, kurse të dytin me 7 dhe i mbledhim do të fitojmë barazim katror homogjen

$$12x^2 - 26xy + 12y^2 = 0 \text{ domethënë } 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0.$$

Prej këtij barazimi fitohet $y^2(6t^2 - 13t + 6) = 0$, ku $t = \frac{x}{y}$. Vlera $y = 0$ nuk është zgjidhje e sistemit, Pra me zgjidhjen e barazimit katror $6t^2 - 13t + 6 = 0$ fitohet $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{2}{3}$. Me kthimin të zëvendësimit fitohen barazimet lineare

$$x = \frac{3}{2}y \text{ dhe } x = \frac{2}{3}y, \text{ përkatësisht sistemet } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \text{ dhe } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}.$$

Prej këtu fitohen zgjidhjet $(2,3), (-2,-3), (3,2), (-3,-2)$.

Shembulli 7. Ta zgjidhim sistemin
$$\begin{cases} x^2 + x + xy = 4 \\ y^2 + y + xy = 8 \end{cases}.$$

Nëse barazimi i parë shumëzohet me y , kurse i dyti me $-x$ dhe barazimet mbledhen kemi $y = 2x$. Me zëvendësimin e barazimit të parë kemi $3x^2 + x - 4 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -\frac{4}{3}$, prej ku fitohet se $y_1 = 2$ dhe $y_2 = -\frac{8}{3}$.

Detyra

Zgjidhi sistemet:

1.
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - 3x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Zgjidhi këto sisteme prej barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

a)
$$\begin{cases} 2x - 1 = y \\ 3x^2 = 4 - y^2 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y - 12 \\ x^2 + \frac{1}{2} = y^2 - \sqrt{2}xy \end{cases}.$$

2. Cakto zgjidhjet e këtyre sistemeve të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

a)
$$\begin{cases} x + 4 = z \\ x^2 + 2z - x = -3z + \frac{1}{2} \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}.$$

3. Cakto zgjidhjet e këtyre sistemeve të barazimit linear dhe katror me dy të panjohura:

a)
$$\begin{cases} 2(x - 3) = 6(x - y) \\ xy = 4 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}.$$

4. Cilët prej sistemeve të dhënë janë homogjen:

a)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 10 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6y^2 + x = 0 \\ 2x^2 - 9xy + y^2 = 29 \end{cases}.$$

5. Zgjidhi sistemet homogjene të barazimeve katrore:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 20 \end{cases}.$$

6. Silli deri në formën homogjene, pastaj zgjidhi këto sisteme të barazimeve

katrore:

a)
$$\begin{cases} 6x^2 - 7xy + 3y^2 = 4 \\ 5x^2 + 6xy - 7y^2 = -11 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}.$$

7. Cilët prej sistemeve të dhëna të barazimeve katrore janë simetrike:

a)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6x + 6y - 9 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 7 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 6y^2 = 4 \\ x^2 - 9xy + y^2 = 29 \end{cases}.$$

8. Gjeji zgjidhjet e sistemeve simetrike të barazimeve katrore:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ x + xy + y - 7 = 0 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}.$$

9. Zgjidh sistemet e barazimeve:

a)
$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

10. Zgjidh sistemet e barazimeve:

a)
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6 \\ y^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}.$$

11. Zgjidh sistemet e barazimeve:

a)
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 12 \\ 5x^2 - 2y^2 = 11 \end{cases}.$$

12. Zgjidh sistemet e barazimeve:

a)
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 4y = 3 \\ x - 5y + 5 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 - 7y^2 = -3 \end{cases}.$$

13. Zgjidh sistemet e barazimeve:

a)
$$\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x = 27 \\ x - 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + y - y^2 = 8 \end{cases}.$$

2. SISTEMET E PABARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

2.1. Barazimi linear me dy të panjohura

Sipas numrit të të panjohurave që i përmban një barazim ai mund të jetë: barazim me një të panjohur, barazim me dy të panjohura etj.

Për shembull, barazim me një të panjohur janë:

$$x = 2x - 1, \quad 3(x + 4) = 3x + 12, \quad x + 3 = x + 4,$$

kurse me dy të panjohura:

$$y + x = -x + 8, \quad xy = x(1 + y) + 2 - x \text{ dhe } 2(x + y) = 2x + 2y.$$

Në vazhdim do të ndalemi te barazimet lineare me dy të panjohura, në barazim linear të llojit $ax + by = c$, ku $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Zgjidhje e barazimit $ax + by = c$ është çdo çift i renditur i numrave real (x_0, y_0) për të cilin barazimi $ax_0 + by_0 = c$ është barazi numerike e vërtetë. Bashkësia prej të gjitha zgjidhjeve të barazimit quhet **bashkësi e zgjidhjeve të barazimit**.

Ta gjejmë bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $ax + by = c$. Shqyrtojmë tre raste:

1. Nëse $a = b = 0$ dhe $c = 0$ atëherë barazimi ka pafund shumë zgjidhje.
2. Nëse $a = b = 0$ dhe $c \neq 0$ atëherë barazimi është i pamundshëm.
3. Nëse të paktën njëri prej koeficientëve a dhe b është i ndryshueshëm prej zeros, për shembull le të jetë $b \neq 0$, barazimi i dhënë është ekuivalent $y = \frac{c - ax}{b}$. Domethënë, nëse k është çfarëdo vlere e të panjohurës x , atëherë zgjidhje e barazimit është çifti $\left(k, \frac{c - ak}{b}\right)$. Domethënë, barazimi ka pafund shumë zgjidhje.

Shembulli 1. Ta shqyrtojmë barazimin $2x - y = 6$.

Barazimi i dhënë është ekuivalent me barazimin $y = 2x - 6$. Çifti $(k, 2k - 6)$ ku k është çfarëdo numër real është zgjidhje i barazimit të dhënë, përkatësisht bashkësia $\{(k, 2k - 6) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit $ax + by = c$ quhet edhe **grafiku** i barazimit linear me dy të panjohura. Grafiku i barazimit linear me dy të panjohura është **drejtëz**.

Le të jetë dhënë barazimi linear me dy të panjohura $ax + by = c$ dhe le të jetë $b \neq 0$. Grafikisht të zgjidhet ky barazim me dy të panjohura domethënë të vizatohet grafiku i këtij barazimi. Ai grafik është drejtëz.

Shembulli 2. Te figura 1 është paraqitur zgjidhja grafike e barazimit $2x - 3y = 6$.

Grafikisht të zgjidhet barazimi linear me një të panjohur të formës $f(x) = g(x)$, domethënë të gjendet abshisa e pikë prerjes së grafikëve të barazimeve $f(x) = y$ dhe $g(x) = y$. Këtë do ta ilustrojmë me shembull.

Shembulli 3. Grafikisht ta zgjidhim barazimin $2x - 1 = x + 3$.

Prej $y = 2x - 1$ dhe $y = x + 3$ pikëprerjeve të grafikëve tërheqim normale në boshtin x me qëllim ta gjejmë abshisën e pikëprerjes. Me këtë fitojmë se $x = 4$, që është zgjidhje e barazimit (figura 2).

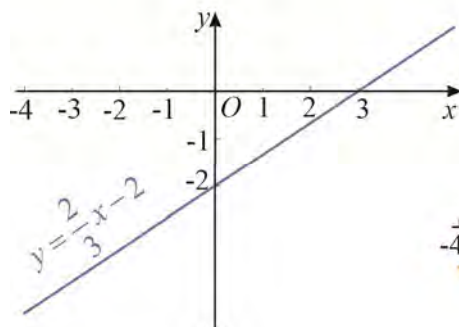


Figura 1

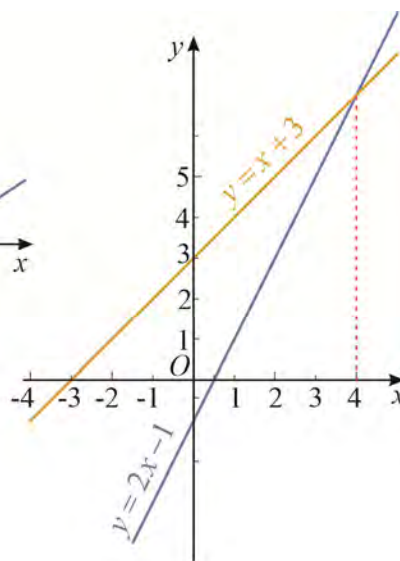


Figura 2

Detyra

Zgjidhi barazimet:

1. $x - y = 1$.
2. $\frac{x}{3} + 2y - 1 = 0$.
3. $4x = -2 + \frac{y}{7}$.

Grafikisht zgjidhi këto barazime:

4. $x - 1 = -x + 5$.
5. $2x + 7 = -2x - 1$.
6. $-x - 1 = -x + 5$.
7. $\frac{7-x}{3} = 1 - x$.
8. $x + y = -1$.
9. $2x + y = 7$.
10. $x = 0$.
11. $y = 4$.

2.2. Pabarazimet lineare me dy të panjohura

Të përkujtohem, se dy shprehje të lidhura me shenjën e pabarazisë bëjnë **pabarazi**. Domethënë, pabarazi janë

$A < B$ ose $A \leq B$ ose $A > B$ ose $A \geq B$, A dhe B janë shprehje.

Shembuj për pabarazi janë:

$3 < 7$, $5 \geq 4 + 1$, $x < 2x - 1$, $y + x \leq -x + 8$.

Nëse të dy shprehjet të pabarazia janë shprehje numerike atëherë pabarazia quhet **pabarazi numerike**. Te shembulli paraprak, pabarazi numerike janë

$3 < 7$ dhe $5 \geq 4 + 1$.

Nëse të pabarazia ka një ose më shumë ndryshore atëherë pabarazia quhet **pabarazim**. Ndryshoret të pabarazia quhen **të panjohura** dhe, shpesh, i shënojmë me $x, y, z, \dots$. Te shembulli i sipërm pabarazime janë

$x < 2x - 1$ dhe $y + x \leq -x + 8$.

Bashkësia e vlerave të lejuara të ndryshoreve quhen **bashkësia e përkufizimit** të pabarazimit.

Me dhënien e vlerave të panjohurave prej bashkësisë së përkufizimit të një pabarazimi, ai kalon në pabarazim (numerik). Nëse gjatë zëvendësimit të panjohurave për të gjitha vlerat prej bashkësisë së përkufizimit të pabarazimit, ai kalon në pabarazim të vërtetë atëherë pabarazimi kalon **pabarazim identik**.

Pabarazime identike janë, për shembull,

$$x+4 > x+3, (x+y)^2 \leq x^2 + 2xy + y^2.$$

Pabarazimi, që me zëvendësimin e të panjohurës për të gjitha vlerat prej fushës së përkufizimit, kalon në pabarazim të pavërtetë, quhet **pabarazim i pamundshëm**.

Shembuj për pabarazime të pamundshme janë:

$$x^2 < 0, (x+y)^2 > x^2 + 2xy + y^2 + 100.$$

Sipas numrit të të panjohurave që i përmban një pabarazim ai mund të jetë: **pabarazim me një të panjohur, pabarazim me dy të panjohura** etj.

Te shembujt paraprak, pabarazime me një të panjohur janë:

$$x < 2x - 1, x + 4 > x + 3, x + 3 > x + 4, x^2 < 0,$$

kurse me dy të panjohura:

$$y + x \leq -x + 8, (x+y)^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \text{ dhe } (x+y)^2 > x^2 + 2xy + y^2 + 100.$$

Sipas fuqisë më të madhe të panjohurave, një pabarazim mund të jetë **pabarazim të fuqisë së parë** ose **pabarazim linear**, **pabarazim të rendit të dytë** ose **pabarazim katror**, **pabarazim të rendit të tretë** ose **pabarazim kubik** etj.

Pabarazimet

$$x < 2x - 1, x + 4 > x + 3, x + 3 > x + 4, y + x \leq -x + 8$$

janë pabarazime lineare, kurse pabarazimet

$$x^2 > 5x + 1, x^2 \geq 0, x^2 < 0, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 100$$

janë pabarazime katrore.

Në vazhdim do të ndalemi te pabarazimet lineare me dy të panjohura, në veçanti te pabarazimet e llojit $ax + by < c$, ku $a, b, c \in \mathbb{R}$. Të gjitha përfundimet e këtij pabarazimi do të vlejnë edhe te tre rastet e tjera $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ ose $ax + by \geq c$.

Zgjidhje e pabarazimit $ax + by < c$ është çdo çift i numrave real (x_0, y_0) , për të cilin pabarazimi $ax_0 + by_0 < c$ është pabarazim i vërtetë numerik. Bashkësia prej të gjitha zgjidhjeve të një pabarazimi quhet **bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit**.

Çdo pabarazim linear me dy të panjohura është ekuivalent ose me pabarazim të llojit $ax + by < c$ ose me $ax + by \leq ku$ $a \neq 0$ ose $b \neq 0$.

Pabarazimi $ax + by < c$ është ekuivalent me pabarazimin $y < -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, nëse

$b > 0$ ose me pabarazimin $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, nëse $b < 0$. Pabarazimi $ax + by \leq c$ është ekuivalent me pabarazimin $y \leq -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ ose me pabarazinë $y \geq -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, në varësisht prej shenjës b .

Nëse e zëvendësojmë shenjë $<$ ($>$, $\leq$ ose $\geq$) te pabarazimet e sipërme me shenjë për barazim ($=$) e fitojmë barazimin $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ cili është barazimi i drejtëzës. Drejtëza $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ në sistemin koordinativ xOy e ndan rrafshin koordinativ në dy gjysmërrafshe. Bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit $ax + by < c$ janë pikat prej njërit gjysmërrafsh të përcaktuar me drejtëzën $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, duke mos përfshirë pikat e drejtëzës, kurse bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit $ax + by \leq c$, përveç pikave prej njërit gjysmërrafsh të përcaktuar me drejtëzën $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ i përfshin pikat e drejtëzës. Për të caktuar cili gjysmërrafsh e bashkësisë së zgjidhjeve të kërkuar, mjafton ta marrim një pikë (kontrolluese) prej njërit gjysmërrafshi dhe ta konstatojmë vlerën e pabarazimit numerik.

Shembulli 1. Ta zgjidhim pabarazimin $2x - y < 6$.

Pabarazimi i dhënë është ekuivalent me e pabarazimin $y > 2x - 6$. E vizatojmë drejtëzën $y = 2x - 6$ në sistemin koordinativ xOy . Pika $(0,0)$ shtrihet në njërin prej të dy gjysmërrafsheve. Me zëvendësimin te pabarazimi fitohet saktë pabarazim numerik, pra përfundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është gjysmërrafsh, të përcaktuar me drejtëzën $y = 2x - 6$, e cila e përmban $(0,0)$ pa pikat e drejtëzës. Them i se bashkësia e zgjidhjeve shtrihen të gjitha pikat mbi drejtëzën $y = 2x - 6$. Te figura 1 është paraqitur bashkësia e pabarazimit të dhënë.

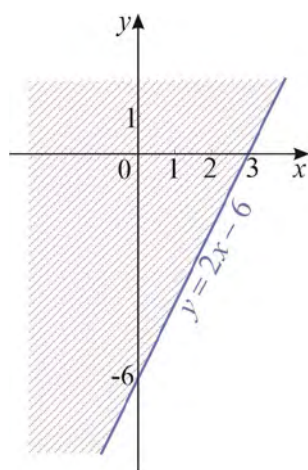


Figura 1

Shembulli 2. Pabarazimi $2x + 3y \geq 6$ është ekuivalent me pabarazimin

$y \geq -\frac{2}{3}x + 2$. E vizatojmë drejtëzën $y = -\frac{2}{3}x + 2$ te sistemi koordinativ xOy . Pasi pika $(0,0)$ nuk është zgjidhje e pabarazimit të dhënë, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është gjysmërrafshi, i caktuar me drejtëzën $y = -\frac{2}{3}x + 2$ që nuk e përmban $(0,0)$ duke përfshirë edhe pikat e drejtëzës. Them i se te

bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit shtrihen të gjitha pikat mbi drejtëzën $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Në figura 2, me pjesën e hijezuar është paraqitur bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë.

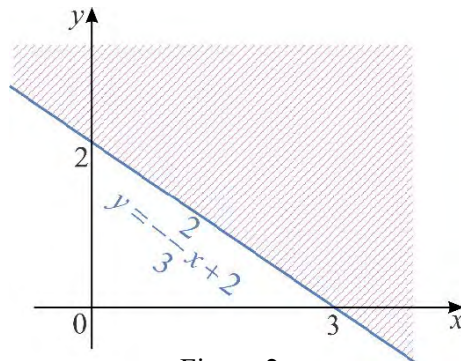


Figura 2

Shembulli 3. Ta zgjidhim pabarazimin $x + 0 \cdot y \geq 3$.

Pabarazimi i dhënë është ekuivalent me pabarazimin $x \geq 3$. E vizatojmë drejtëzën $x = 3$, e cila është paralele me boshtin y , në sistemin koordinativ xOy . Pasi pika $(0,0)$ nuk është zgjidhje e pabarazimit të dhënë, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është gjysmërrafshi, të përcaktuar me drejtëzën $x = 3$, e cila nuk e përmban $(0,0)$ duke i përfshirë edhe pikat e drejtëzës. Themi se bashkësia e zgjidhjeve të drejtëzës është paraqitur bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë.

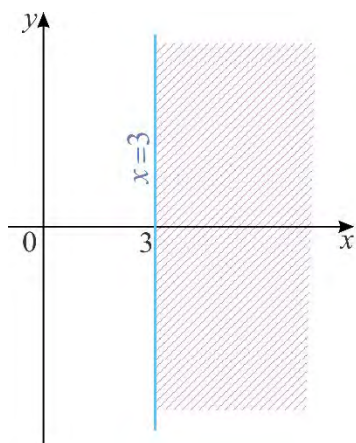


Figura 3

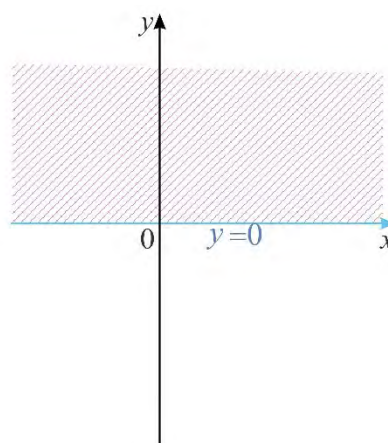


Figura 4

Shembulli 4. Pabarazimi $0 + x \cdot y \geq 0$ është ekuivalent me pabarazimin $y \geq 0$. E vizatojmë drejtëzën $y = 0$ në sistemin koordinativ xOy . Në realitet, ai është boshti x . Pasi pika $(0,1)$ është zgjidhje e pabarazimit të dhënë, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është gjysmërrafshi, i caktuar me boshtin x , që nuk e përmban $(0,1)$ duke përfshirë edhe pikat e drejtëzës. Themi se bashkësinë e të gjitha pikave mbi boshtin $y = 0$ ose mbi boshtin x . Në figura 4, me pjesën e hijezuar është paraqitur bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë.

Detyra

Zgjidhi këto pabarazime:

1. $x - y > 1$.

2. $\frac{x}{3} + 2y - 1 \geq 0$.

3. $4x < -2 + y$.

4. $x \leq -1$.

5. $y \leq 7$.

6. $\frac{1-x}{3} < \frac{2}{3}y - 4$.

7. $x + y \geq 1 - \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$.

8. $\frac{2-x+y^2}{y^2+4} > 1$.

2.3. Sistemi prej dy pabarazimeve lineare me dy të panjohura

Ta shqyrtojmë sistemin

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 > 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0 \end{cases}$$

Kuptohet, te sistemi janë të mundshme të gjitha shenjat për pabarazim. Tani vërejtëm se zgjidhja e çdo pabarazim linear me dy të panjohura është gjysmërrafshi, i zgjidhjes së sistemit është prerje e atyre gjysmë rrafshëve.

Zgjidhjes së sistemit ndikon pozita reciproke e drejtëzave

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ dhe } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Nëse drejtëzat priten, atëherë sistemi i shprehur nëpërmjet të panjohurës y mund të ketë njëjërën prej këtyre formave:

$$\begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases},$$

ku $k_1 = -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} = k_2$.

Në këtë rast sistemi gjithmonë ka zgjidhje. Kjo lehtë mund të vërehet te paraqitja grafike e sistemeve te figura 1.

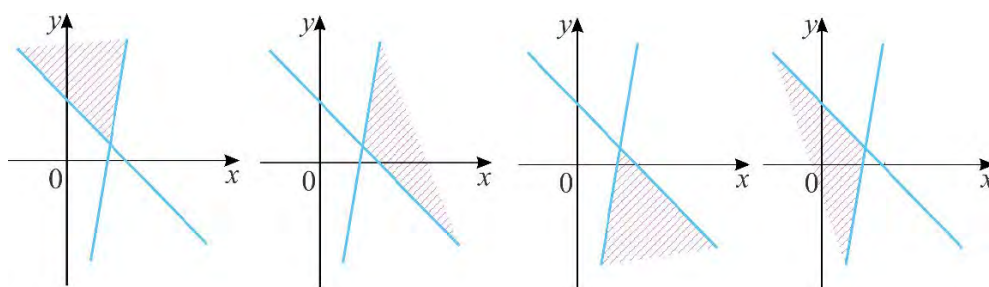


Figura 1

Nëse, drejtëzat $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dhe $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ janë paralele, atëherë $k_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} = k_2$, kurse sistemi i shprehur nëpërmjet të panjohurës y mund të ketë vetëm njëjërën prej formave:

$$\begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases}.$$

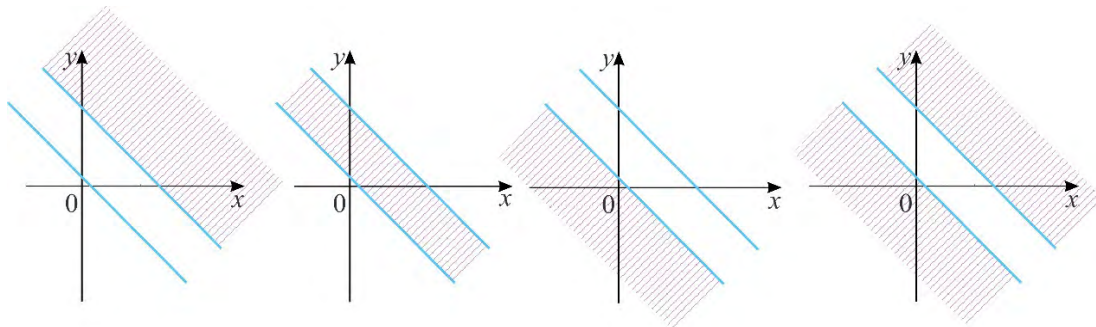


Figura 2

Sistemi nuk ka zgjidhje nëse të drejtëzat paralele bashkësia e zgjidhjeve nuk kanë prerje. Paraqitja grafike e zgjidhjes së sistemit në rastin kur drejtëzat janë paralele është dhënë te figura 2.

Vijojnë disa shembuj për zgjidhjen grafike të sistemeve të pabarazimeve lineare me dy të panjohura.

Shembulli 1. Sistemi $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$ është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y < -2x + 6 \end{cases}$.

Bashkësia e zgjidhjeve e çdonjërës prej pabarazimeve të sistemit e paraqesim grafikisht në të njëjtin sistem koordinativ. Gjysmërrafshet të cilat janë zgjidhje të pabarazimeve janë shënuar me shigjeta të drejtëzat të cilat i përcaktojnë. Pastaj e përcaktojmë prerjen e tyre, që është njëkohësisht bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të pabarazimeve të dhëna.

Pjesa e hijezuar te figura 3 është bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dhënë të pabarazimeve (te e cila i takojnë vetëm pikat e gjysmëdrejtëzës prej drejtëzës $y = -x + 5$ të përcaktuar me pikën (1,4) dhe pa atë).

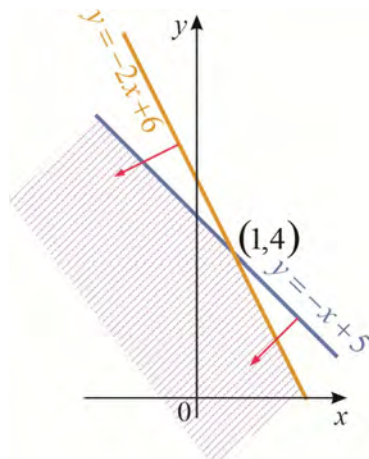


Figura 3

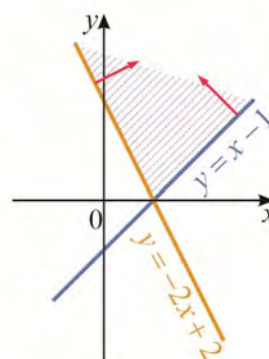


Figura 4

Shembulli 2. Grafikisht ta zgjidhim sistemin e pabarazimeve $\begin{cases} x - y \leq 1 \\ y \geq -2x + 2 \end{cases}$.

Sistemi i dhënë i pabarazimeve është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} y \geq x-1 \\ y \geq -2x+2 \end{cases}$.

Pjesa e hijezuar te figura 4 është bashkësia e zgjidhjeve të kërkuara (te e cila i takojnë edhe pikat e gjysmërrafshit).

Shembulli 3. Grafikisht ta zgjidhim sistemin e pabarazimeve:

a) $\begin{cases} x+y \geq 3; \\ x+y \leq 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 5 \end{cases}$.

Pjesa e hijezuar te figura 5 është bashkësia e zgjidhjeve të kërkuara të sistemit të pabarazimeve nën a) (te e cila i takon edhe pikat e gjysmërrafsheve), kurse bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të pabarazimeve nën b) është bashkësia e zbrazët (figura 6).

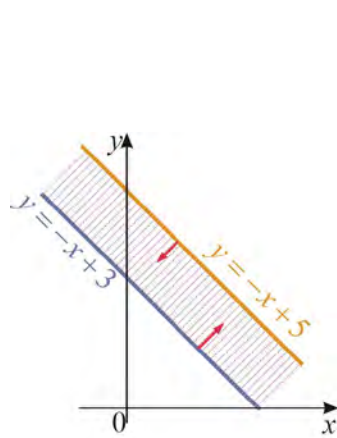


Figura 5

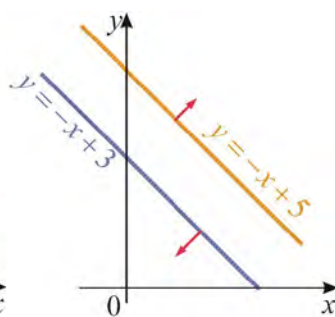


Figura 6

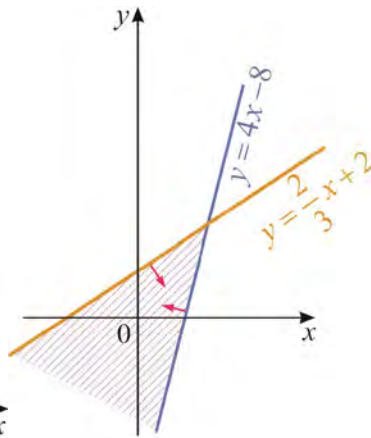


Figura 7

Shembulli 4. Grafikisht zgjidhe sistemin e pabarazimeve $\begin{cases} 2x-3y \geq -6 \\ 4x-y \leq 8 \end{cases}$.

Pjesa e hijezuar te figura 7 është bashkësia e zgjidhjeve të kërkuara të sistemit të pabarazimeve (te e cila i takojnë edhe pikat e segmenteve).

Detyra

Grafikisht zgjidhi sistemet e pabarazimeve lineare me dy të panjohura:

1. $\begin{cases} -x+y \geq 3 \\ y \geq 4x \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x+2y \leq 2 \\ x+2y \geq -2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x-2y \leq 3 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} -x+y \leq 4 \\ 2x+5y \leq 27 \end{cases}$.

2.4. Paraqitja grafike e sistemit prej më shumë pabarazimeve lineare me dy të panjohura dhe zbatimi

Paraqitja grafike e sistemit prej më shumë pabarazimeve lineare me dy të panjohura

Në rastin kur kemi më shumë pabarazime lineare me dy të panjohura sistemin e zgjidhim në të njëjtën mënyrë sikurse kur te sistemi ka vetëm dy pabarazime lineare me dy të panjohura.

Shembulli 1. Zgjidhja grafike e sistemit
$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 3x - 4y \leq 12 \\ 4x + y \geq -4 \end{cases}$$
 janë të gjitha pikat

prej rrafshit të cilat shtrihen brenda te trekëndëshi së bashku me pikat të cilat shtrihen te segmentet e drejtëzave (figura 1).

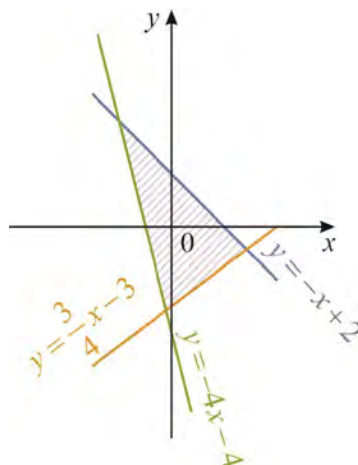


Figura 1

Shembulli 2. Grafikisht ta zgjidhim sistemin e pabarazimeve
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - y \leq 8 \end{cases}$$

Pika $(0,0)$ i plotëson kushtet e pabarazimit të dytë dhe të tretë, pjesa e hijez uar te figura 2 a) është bashkësia e zgjidhjeve të kërkuara të sistemit të pabarazimeve (te e cila i takojnë edhe pikat e segmenteve).

Zbatimi i sistemit të pabarazimeve lineare me dy të panjohura

Shpeshherë ka nevojë të caktojmë vlerën më të vogël ose më të madhe të bashkësisë së zgjidhjeve të pabarazimeve me dy të panjohura. Për këtë qëllim mund të shfrytëzohet metoda grafike sikurse te shembujt paraprak.

Shembulli 3. a) Ta gjejmë vlerën më të madhe të funksionit $z = 7x + 10y$ nëse vlejnë këto kushte

$$\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Grafikisht e zgjidhim sistemin e pabarazimeve lineare me dy të panjohura

$$\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

dhe e fitojmë zgjidhjen të paraqitur me katërkëndëshin $OABC$ (figura 2 b)) ku $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(2, 3)$ dhe $C(0, 4)$. Ta shqyrtojmë drejtëzën me rrafshin $7x + 10y = 0$ domethënë $y = -\frac{7}{10}x$. Ajo kalon nëpër kulmin O dhe nuk ka pika me katërkëndëshin $OABC$.

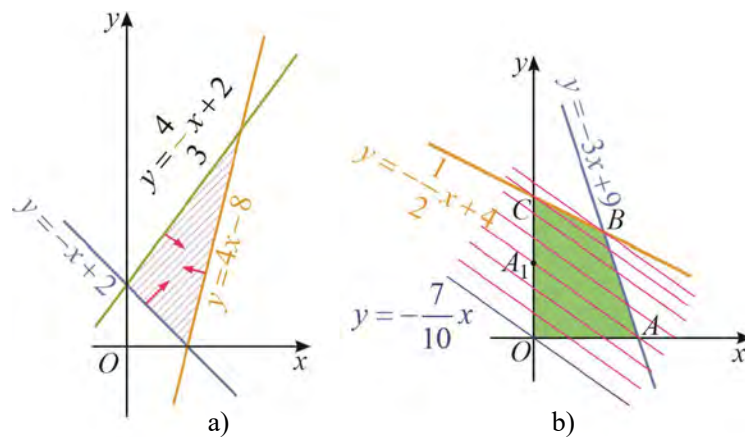


Figura 2

Tani, ta zhvendosim paralelisht sipas pjesës pozitive të boshtit y . Domethënë fitohen drejtëzat $7x + 10y = z$, dhe poashtu me largimin e drejtëzës prej fillimit të koordinatave, vlera e z zmadhohet. Vërejmë se te pikat prej prerjes së drejtëzës me katërkëndëshin $OABC$ vlera e z është e njëjtë. Kështu për shembull, nëse drejtëzën e vendosim te pika A vlera e z te të gjitha pikat prej segmentit AA_1 njëjtë domethënë $z = 7 \cdot 3 + 10 \cdot 0 = 21$. Në kulmin C kemi $z = 7 \cdot 0 + 10 \cdot 4 = 40$ për të gjitha pikat e prerjes së drejtëzës $7x + 10y = 40$ me katërkëndëshin. Prandaj vlera e z do të jetë më e madhe kur drejtëza do të arrijë te kulmi B , dhe atëherë $z = 7 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 44$ dhe ajo është vlera më e madhe e z dhe arrihet për $x = 2$ dhe $y = 3$.

b) Ta caktojmë vlerën më të vogël dhe më të madhe e $z = 2x + 3y$ në bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit

$$\begin{cases} x + 5y \geq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ 2x + 4y \geq 16 \\ 2x + 2y \geq 10 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Zgjidhja grafike e sistemit është dhënë te figura 3.

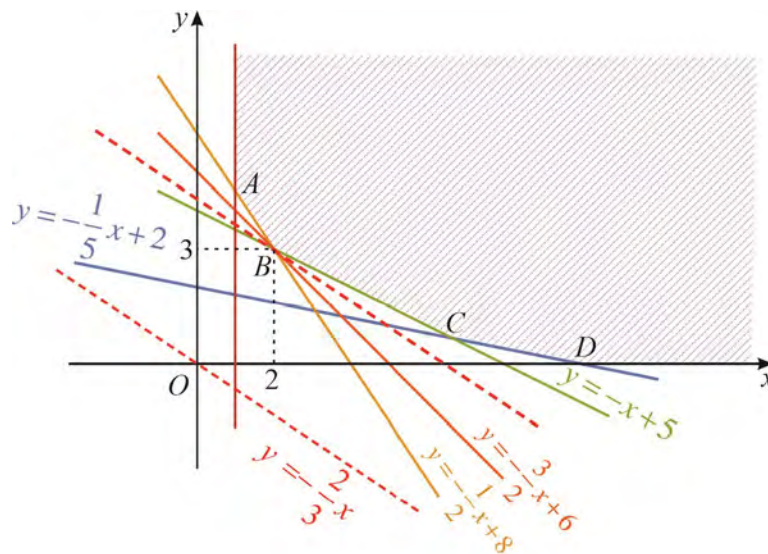


Figura 3

Në mënyrë analoge sikurse nën a) vlera më e vogël $z = 13$ fitohet për $x = 2, y = 3$, por vlera më e madhe nuk ka pasi bashkësia e zgjidhjeve të sistemit nuk është e kufizuar prej lartë.

Ekziston edhe tjetër metodë për zgjidhjen e sistemit të pabarazimeve lineare me dy të panjohura edhe te ai nuk ka nevojë prej paraqitjes grafike të bashkësisë së zgjidhjeve. Ajo është metodë e përjashtimit, ku prej sistemit përjashtohet njëra prej të panjohurave dhe kështu caktohet vlera më e vogël ose më e madhe e kërkuar.

Shembulli 4. Ta caktojmë vlerën më të vogël të $z = -2x - y$

$$\text{bashkësisë së zgjidhjeve të sistemit } \begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Domethënë duhet të caktojmë për cilat vlera të x dhe y do të vlen $z \geq -2x - y$. Për këtë qëllim të gjitha pabarazimet te sistemi i shprehim nëpërmjet x domethënë, e përjashtojmë të panjohurën y . Prandaj kemi

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 - 2y \\ x \geq 2 - y \\ x \geq 3 + y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y \leq 6 - 2y \\ 3 + y \leq 6 - 2y \\ 0 \leq 6 - 2y \\ x \geq -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ y \leq 1 \\ y \leq 3 \\ 6 - 2y \geq -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Prej këtyre pabarazimeve është e qartë se $0 \leq y \leq 1$ dhe $z \geq 3y - 12$. Pabarazimi i fundit ka vlerë më të vogël kur $y = 0$, pra me zëvendësimin te sistemi fillestar fitohet

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \\ 6 \leq x \end{cases}$$

prej ku përfundohet se $x = 6$. Domethënë vlera më e vogël është $z = -12$ fitohet për $x = 6, y = 0$.

Zbatimi i sistemit prej më shumë pabarazimeve lineare me dy të panjohura në jetën reale

Zbatimi i zgjidhjes së sistemit të pabarazimeve lineare me dy të panjohura është shpërndarë nëpër zgjidhjen e problemeve të ndryshme nga ekonomia dhe organizata e prodhimit, planifikimi i investimeve, kufizimi i transportit, krijimi i qendrave ushqimore të cilat sjellin profit pasi që ofron caktimin e gjendjes më të volitshme të cilat përfitimi zmadhohet, kurse humbja zvogëlohet.

Mënyra me të cilën nëpërmjet të shkruarit e sistemit të pabarazimeve lineare kërkohet vlerësimi i ndonjë vlere më të vogël ose më të madhe quhet **programimi linear**.

Shembulli 5. Një kompani prodhon dy lloje të automjeteve ekologjik për mbledhjen e mbeturinave. Kompania ka kapacitet të prodhon 70 automjete në ditë dhe ka 120 orë punë kohore efektive gjatë ditës. Koha e nevojshme të prodhohen automjete i llojit të parë është 1 orë, kurse prej llojit të dytë 3 orë. Përfitimi prej llojit të parë të automjeteve është 40 euro, kurse prej të llojit të dytë 60 euro. Cakto përfitimin maksimal ditore të kompanisë, nëse llogaritet se të gjithë automjetet janë punuar dhe shitur.

Nëse e shënojmë me x numrin e automjeteve të llojit të parë, kurse me y numrin e automjeteve të llojit të dytë, atëherë përfitimi ditor është $z = 40x + 60y$. Kjo do të thotë se duhet ta caktojmë vlerën më të madhe të funksionit $z = 40x + 60y$, nëse vlejnë këto kushte:

$$\begin{cases} x + y \leq 70 \\ x + 3y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Së pari e caktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit të pabarazimeve (figura 3) që mund ta quajmë zona e lejuar. Në këtë rast ai është katërkëndëshi $OABC$ ku $O(0,0)$, $A(70,0)$, $C(0,40)$. Koordinatat e kulmit B i gjejmë me zgjidhjen e sistemit

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x + 3y = 120 \end{cases},$$

përkatësisht $B(45,25)$. Në çdo kulm prej zonës e njehsojmë vlerën e funksionit $z = 40x + 60y$ domethënë $z = 40 \cdot 45 + 60 \cdot 25 = 3300$.

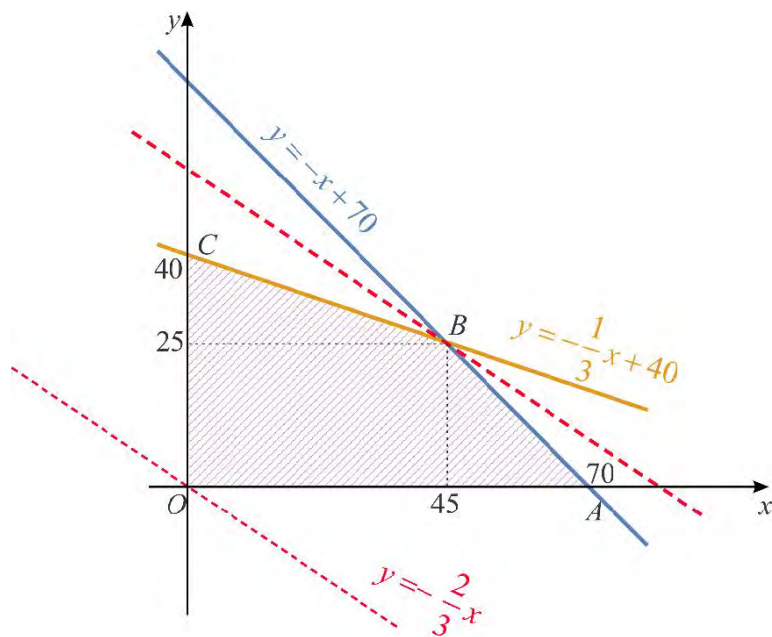


Figura 4

Domethënë, përfitimi ditor maksimal i kompanisë është 3300 euro, kurse fitohet me prodhimin e 45 automjeteve të llojit të parë dhe 25 automjete të llojit të dytë.

Shembulli 6. Një kompani prodhon dy lloje të prodhimeve X dhe Y , Duke shfrytëzuar. Dy makina A dhe B . Çdo prodhim i llojit X kërkon 50 minuta kohë për punimin e makinës A dhe 30 minuta kohë për punimin e makinës B . Çdo prodhim i llojit Y kërkon 24 minuta kohë për punimin e makinës A dhe 33 minuta kohë për punimin e makinës B .

Në fillimi të javës të mbetjeve ka 30 prodhime të llojit X dhe 90 njësi prodhimi të llojit Y . Koha në disponim e punimit të makinës A parashikohet për 40 orë, kurse për makinën B është parashikuar të jetë 35 orë.

Kërkesa e prodhimeve të llojit X gjatë javës aktuale janë parashikuar të jenë 75 prodhime, kurse për Y parashikohet të jetë 95 prodhime. Politika e kompanisë është të maksimizohet shuma e kombinuar e prodhimeve të prodhimeve të llojit X dhe prodhimet e llojit Y të mbetjeve në fund të javës. Të caktojmë sa prodhime prej çdo lloj duhet të bëhen gjatë javës.

Le të jetë x numri i prodhimeve të llojit X të prodhuara gjatë javës, dhe y është numri i prodhimeve të llojit Y të prodhuara gjatë javës. Atëherë numri i prodhimeve të mbetjeve në fund të javës është

$$z = (x + 30 - 75) + (y + 90 - 95) = x + y - 50.$$

Duhet ta caktojmë vlerën më të madhe të funksionit $z = x + y - 50$ nëse vlejné këto kushte:

$$\begin{cases} 50x + 24y \leq 40 \cdot 60 = 2400 \\ 30x + 33y \leq 35 \cdot 60 = 2100 \\ x \geq 75 - 30 = 45 \\ y \geq 95 - 90 \end{cases}$$

Prej figurës 5 është e qartë se maksimumi paraqitet te prerja e drejtëzave $x = 45$ dhe $50x + 24y = 2400$.

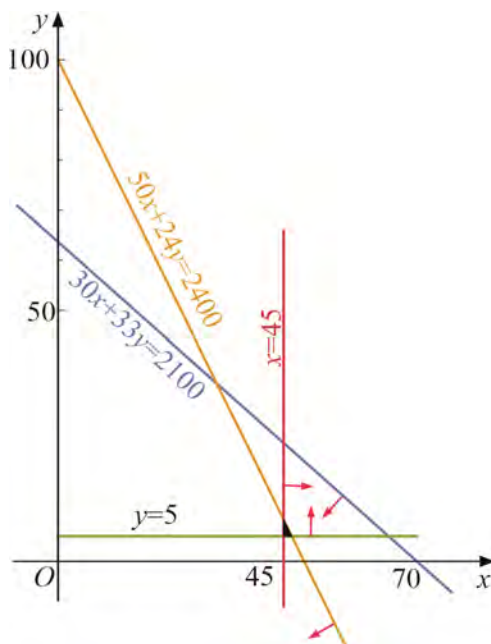


Figura 5

Duke zgjidhur, në vend duke lexuar vlerën prej grafikut, kemi se $x = 45$ dhe $y = 6,25$ dhe $z = 1,25$.

Shembulli 7. Një kompani prodhon dy artikuj X dhe Y . Resurset që janë të nevojshme për prodhim të X dhe Y janë të dyfishta, përkatësisht koha e makinës për punimin automatik dhe koha e mjeshtrit për punë dore. Tabela e mëposhtme e jep numrin e minutave të nevojshme për çdo artikull:

Prodhimi	Koha e makinës	Koha e mjeshtrit
X	13	20
Y	19	29

Kompania ka në disponim javën e ardhshme të punës 40 orë kohë të makinës dhe 35 orë kohë të mjeshtrit. Koha e makinës kushton 10 euro në orë, kurse koha e mjeshtrit kushton 2 euro në orë. Koha e pushimit të makinës dhe të mjeshtrit nuk bëjnë shpenzime. Të ardhurat (tërë prodhimi shitet) është 20 euro për X dhe 30 euro për Y . Kompania ka kontratë për prodhimin e 10 artikujve X në javë për klient të caktuar. Ta caktojmë vëllimin javor të prodhimit.

Le të jetë x numri i artikujve X dhe y numri i artikujve Y . Atëherë vëllimi javor mund të shkruhet si

$z = 20x + 30y - 10 \cdot \text{kohë pune të makinës} - 2 \cdot \text{kohë pune të mjeshtrit}$. Kjo do të thotë se duhet ta caktojmë vlerën më të madhe të funksionit z , nëse vlejné këto kushte:

$$\begin{cases} 13x + 19y \leq 40 \cdot 60 \\ 20x + 29y \leq 35 \cdot 60 \\ x \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Atëherë kemi se

$$z = 20x + 30y - 10(13x + 19y) - 2(20x + 29y) = 17,1667x + 25,8667y$$

nën kushtet:

$$\begin{cases} 13x + 19y \leq 2400 \\ 20x + 29y \leq 2100 \\ x \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

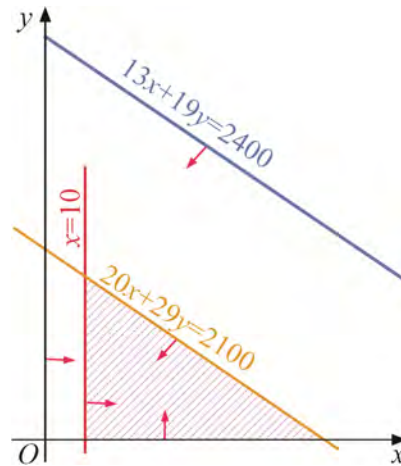


Figura 6

Duke zgjidhur, në vend të leximit vlera prej figurës $x=10$ dhe $y=65,52$, kurse vlera e $z=1866,5$ euro.

Detyra

1. Zgjidhi grafikisht pabarazimet

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + 3y \geq 0 \\ x - 4y \geq -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - 4y \geq 2 \\ x + 3y \geq -5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x + 4y \leq 7 \\ -5x - y \leq 3 \\ x - 2y \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{2. Cakto vlerën më të vogël të } z = 3x + y \text{ nëse } \begin{cases} 4x + y \geq 11 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{3. Cakto vlerën më të madhe të } z = x + 6y \text{ nëse } \begin{cases} x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 12 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

4. Për shkak të mungesës të borit dhe fluorit në organizëm, mjeku i këshillon pacientët se periudhën e ardhshme në ditë të fusin më së paku 60 μg bor dhe 150 μg fluor. Pacienti ka në disponim dy tonik A dhe B, çmimi është 5 euro ose 3 euro për decilitër. Toniku i parë (në decilitra) përmban 2 μg bor dhe 8 μg fluor, kurse të tjerat 4 μg bor dhe 6 μg fluor. Sa është sasia e tonikëve A dhe B duhet të merr pacienti në ditë ta plotëson referencën e mjekut dhe atë me shpenzime minimale?

5. Kompania prodhon dy lloje të përzierjeve me drithëra. Premium dhe Super, me çmim shitës prej 7 euro për kilogram. Përbërësit e vetëm të këto prodhime janë thekra dhe elbi. Me qasje janë 80 kilogram thekër dhe 100 kilogram elb. Për prodhimin e një kilogram Premium janë të nevojshme 600 gram thekër, kurse për një kilogram Super janë të nevojshme 400 gram elb. Përvoja e deritanishme tregon se nuk mund të shiten më shumë se 60 kilogram Premium. Sa Premium duhet të bëhen, kurse sa Super, që të realizohet profiti më i madh i shitjes?

6. Një fabrikë tekstili prodhon dy lloje të pantallonave. Për llojin e parë të pantallonave janë të nevojshme 10 minuta për prerje dhe 20 minuta për qepje. Për llojin e dytë të pantallonave janë të nevojshme 10 minuta për prerje dhe 30 minuta për qepje. Fabrike mund të siguron më së paku 7500 minuta në ditë për prerje dhe 19500 minuta për qepje. Përfitimi prej një pale të llojit të parë të pantallonave është 300 denarë, kurse përfitimi prej një çifti të llojit të dytë të pantallonave është 375 denarë. Sa palë pantallona prej të dy llojeve duhet të prodhohen në ditë që të fitohet përfitimi maksimal?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

Grafikisht zgjidhi pabarazimet lineare me dy të panjohura:

1. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} - 1 = 0.$

2. $x = -2 + 3y.$

3. $x + y \leq 3.$

4. $-\frac{x}{3} + y - 1 < 0.$

5. $y > 2.$

6. $x \leq 6.$

7. Grafikisht zgjidhi sistemet:

a) $\begin{cases} 4x + y \geq 3 \\ x - 7y \leq 3 \end{cases};$

b) $\begin{cases} -4x + y \leq 4 \\ -2x + 3y \leq 12 \end{cases}.$

8. Grafikisht zgjidhi sistemet:

a) $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 4x - 8y \geq -6; \\ 4x - y > 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x - y < 2 \\ x - y < 10 \\ 4x - 3y > 4 \end{cases}.$

Grafikisht zgjidhi sistemet e pabarazimet lineare:

9. $\begin{cases} -x + y \geq -1; \\ x + y < 4 \end{cases};$

10. $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$

11. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}.$

12. $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 9x + 2y \leq 27 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}.$

13. Cakto vlerën më të vogël të $z = 7x + 6$ nëse $\begin{cases} 5x + 2y \geq 16 \\ 3x + 7y \geq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

14. Cakto vlerën më të madhe të $z = 6x + 3y$ nëse $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 9x + 2y \leq 27 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$.

15. Cakto vlerën më të vogël të $z = 3x_1 + 8x_2$ nëse $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \geq 50 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

16. Cakto vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksionit $z = 5x + 7y$ nëse vlejné këto kushte

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 3x - y \leq 15 \\ -x + y \leq 4 \\ 2x + 5y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

17. Cakto vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksionit $z = x + 3y$ nëse vlejné këto kushte

$$\begin{cases} 3x + y \geq 45 \\ x + 2y \geq 50 \\ x + y \leq 35 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

18. Një argjendari prodhon byzylyk dhe qafore. Argjendari në ditë mund të prodhon më së shumti 24 copa byzylyk dhe qafore, së bashku. Për përpunimin e një byzylyku nevojitet 1 orë, kurse për përpunimin e një qafore është $\frac{1}{2}$ orë. Argjendari punon 16 orë në ditë. Nëse përpunimi i një byzylyku është 2 euro, kurse përpunimi i një qafore është 1 euro, sa është përfitimi maksimal?

19. Një peshkatar është peshkuar me dy lloje të peshqve, krap dhe sharani. Pronari i ushqen peshqit me dy lloje të ushqimit. Për krapin duhet 2 njësi ushqimore prej llojit të parë dhe 4 njësi prej llojit të dytë, kurse 2 njësi prej ushqimit të dytë. Nëse pronari ka 800 njësi prej çdo lloji ka 800 njësi prej çdo lloji ushqimi, cakto numrin maksimal të peshqve me të cilët liqeni mund të peshkohet.

3. LLOGARIA E INTERESIT TË PËRBËRË

3.1. Konceptet për interesin e përbërë

Para se të njihemi me llogarinë e interesit të përbërë, të përkujtohem në disa prej detyrave të thjeshta të cilat janë të llogarisë së interesit të thjeshtë.

Huazimi i parave është transaksion i nevojshëm me të cilën shpesh ballafaqohemi në jetën e përditshme. Huamarrësi mund t'i shfrytëzon paratë për të realizuar fitim që huamarrësi nuk ka mundësi ta realizon, kurse ai për llogari të asaj fiton kompensim për paratë e huazuara, të quajtur **interes**. Bankat paguajnë interes të personave fizik dhe kompani të cilat paratë e tyre i deponojnë në llogari bankare, dhe anasjelltas ato paguajnë interes bankave kur prej atyre huazojnë shumë të caktuar të parave.

Lartësia e shumës së parave të deponuara ose të huazuara, përkatësisht shumata e cila njihsohet interesi quhet **pjesa kryesore**.

Periudha për të cilën duhet të kthehet shumata e parave të huazuara quhet **kohëzgjatja e huas**. Zakonisht kjo është periudha të matet në njësi ditore, muaj ose vite.

Lartësia e interesit që është realizuar për njësi kohe është proporcionale me pjesën kryesore, përkatësisht paraqet ndonjë përqindje prej pjesës kryesore, dhe quhet **norma e interesit**. Prandaj, llogaria e interesit është norma e përqindjes e lidhur për periudhë kohore të caktuar. Prandaj, lartësia e interesit nuk varet vetëm prej pjesës kryesore, kurse edhe prej kohëzgjatjes së huas.

Ta njehsojmë interesin me K , pjesën kryesore me G , kohëzgjatjen e huasë me t dhe normën e interesit me p .

Shembulli 1. Sa interes fitohet prej 3200 euro pas 5 vjet, nëse ato janë vendosur në bankë dhe te ato njihsohet 3% normë të interesit vjetor?

Me ndihmën e formulës $K = p \cdot G \cdot t$, ku pjesa kryesore ose kapitali $G = 3200$ euro, norma e interesit $p = \frac{3}{100} = 0,03$ dhe koha $t = 5$ fitohet interesi $K = 0,03 \cdot 3200 \cdot 5 = 480$ euro.

Parashtrohet pyetja: Sa interes do të fitojmë, nëse për 5 vjet e njëjta shumë afatizohet ashtu që pas çdo viti interesi i shtohet kapitalit dhe kështu fitohet kapitali i ri?

Pas vitit të parë interesi është $K_1 = 0,03 \cdot 3200 \cdot 1 = 96$ euro. Kapitali për vitin e dytë tani është $G_1 = G + K_1 = 3200 + 96 = 3296$ euro. Interesi në fund të vitit të dytë është $K_2 = 0,03 \cdot 3296 = 98,88$ euro. Në fillim të vitit të tretë kapitali është $G_2 = G_1 + K_2 = 3296 + 98,88 = 3394,88$ euro, por në fund interesi është $K_3 = 0,03 \cdot 3394,88 \approx 101,85$. Në mënyrë analoge është $G_3 = 3496,73$, $K_4 \approx 105$, $G_4 = 3601,73$ dhe $K_5 = 108$. Përfundimisht në fund të vitit të pestë është $G_4 = G_3 + K_4 = 3601,73 + 108 = 3709,73$ euro, kurse interesi është $G_5 - G_1 = 3709,73 - 3200 = 509,73$ euro. Vërejmë se gjatë mënyrës së këtillë të njehsimit të interesit shumata e cila është më e madhe se mënyra e dytë e njehsimit.

Nëse interesi i shtohet kapitalit fillestar, kurse pastaj përsëri do të njehsohet interesi i kapitalit të ri, atëherë themi se interesi me ndihmën e **llogarisë së interesit të përbërë**. Në këtë njësi modulare, nëse ndryshe nuk është theksuar, me llogari interesi do të nënkuptojmë llogari interesi të përbërë.

Mënyra me të cilën kapitali fillestar i shtojmë mjete si interesi quhet **interesi i interesit**.

Formimi i kapitalit të ri në fund të një viti me shtuarjen e interesit quhet **kapitalizimi vjetor** ose **interesi vjetor**. Nëse interesi njehsohet në gjysmë viti dhe i shtohet kapitalit fillestar, atëherë bëhet fjalë për **kapitalizimi i gjysmëviti**. Periudha kohore për të cilën njehsohet interesi mund të jetë edhe më shkurtër domethënë, ekziston **kapitalizimi tremujor (kuartal)**, **kapitalizimi mujor** etj. Mund të themi se ekziston periudhë e ndryshme e interesit (vjetore, semestrale, kuartale, mujore...).

Për shkak të ekzistimit të periudhave të ndryshme të interesit, të futura janë edhe mënyra të ndryshme të të shkruarit, pikërisht

- nëse interesi është vjetor vendojmë (pa) (shkurtimisht prej per annum)
- nëse interesi është gjysmëviti ose semestrale vendojmë (ps) (shkurtimisht prej per semestre)
- nëse interesi është tremujore vendojmë (pq) (shkurtimisht prej per quartale)
- nëse interesi është mujor vendojmë (pm) (shkurtimisht prej per mansem)

Koha t për të cilën njehsohet interesi i përbërë patjetër të shprehet me njësi të njëjta kohore, prandaj nëse koha është 1 vit dhe 6 muaj, atëherë gjatë interesit vjetor do të themi se kemi $t = 1,5$ periudha, kurse për interesin gjysmëviti kemi 3 periudha.

Interesi mund të njehsohet në dy mënyra: **dekurzive** ose **anticipative**. Kur njehsohet dekurzive, atëherë interesi njehsohet në fund të periudhës, kurse te interesi anticipativ njehsohet në fillim të periudhës.

Shembulli 2. Të caktojmë sa është shuma e fituar prej 20000 denarë, me 2% kapitalizim dekurziv të gjysmëviti pas dy viteve.

I fusim këto shënime:

$$G_1 = 20000 \text{ denarë}, \quad p = \frac{2}{100} = 0,02.$$

Pas gjysmëviti të parë të vitit fitohet

$G_2 = G_1 + K_1 = 20000 + 0,02 \cdot 20000 = 20400$ denarë, kurse në fund të vitit të parë $G_2 = 20808$ denarë. Ngjashëm, $G_3 = 21224,16$ denarë dhe $G_4 = 21648,64$ denarë.

Shembulli 3. Dihet se kapitalizimi dekurziv vjetor prej 5% pas 2 vite janë fituar 25720 denarë. Ta caktojmë lartësinë e kapitalit fillestar.

Nëse me x e shënojmë shumën e cila fitohet pas vitit të parë, atëherë $x + 0,05 \cdot x = 25720$ prej ku $x = \frac{25720}{1,05} = 24495,24$ denarë. Nëse me y e shënojmë lartësinë e kapitalit fillestar, atëherë $y + 0,05 \cdot y = 24495,24$, prej ku fitojmë se $y = \frac{24495,24}{1,05} = 23328,8$ denarë.

Shembulli 4. Një bankë ka lejuar hua prej 1000 euro, me 4% (pa). Do të bëjmë krahasim ndërmjet mënyrës dekurzive dhe anticipative të njehsimit të interesit.

Gjatë mënyrës dekurzive të njehsimit të huas prej 1000 euro i shtohet interesi prej $\frac{4}{100} \cdot 1000 = 40$ euro, pra ai kapital i shtuar kaptallit fillestar është 1040 euro. Kjo do të thotë se banka jep hua prej 1000 euro dhe në fund të një viti, pret kthimin e 1040 euro. Gjatë mënyrës anticipative, prej huas prej 1000 euro zbritet interesi prej 40 euro dhe fitohen 960 euro. Në këtë rast, banka paguan 960 euro si hua, kurse pas një viti pret kthim prej 1000 euro.

Prej shembullit qartë vërehet se mënyra anticipative e interesit është jo e volitshme për shfrytëzuesin e huas, pasi ai paguan interes edhe të shumës të cilën nuk e ka marrë prej bankës. Me qëllim të lartësisë së huas të jetë e njëjtë, kurse jo më e vogël, duhet të paguhet interes prej 4% dhe në ato 40 euro të cilat mungojnë në fillim. Përfundimisht në fund të interesit prej një viti, për hua prej $40 + \frac{4}{100} \cdot 40 = 41,6$ euro.

Prandaj përveç informatës për periudhën e interesit ekziston edhe informatë për mënyrën e njehsimit të interesit, pra 7% (pa) do të thotë se interesi vjetor prej 7% do të njehsohet në mënyrë dekurzive, kurse 6,5% (ps) ose interesi gjysmëviti do të njehsohet në mënyrë anticipative.

Te të gjitha këto detyra do të njehsojmë në mënyrë dekurzive. Për të kaluar prej mënyrës anticipative në mënyrë dekurzive të njehsimit të interesit do ta shfrytëzojmë formulën $p = \frac{100 \cdot q}{100 - q}$, ku p është përqindja e mënyrës

dekurzive, kurse q është përqindja e mënyrës anticipative e interesit. Deri te kjo formulë arrihet me barazimin e interesave të mënyrës anticipative. Të cilat duhet të paguhen gjatë të dy mënyrave të interesit. Nëse kapitalin e shënojmë me G , atëherë mënyra dekurzive e interesit kemi $G_1 = G + \frac{p}{100} \cdot G = G \left(1 + \frac{p}{100} \right)$, kurse gjatë mënyrës

anticipative $G = G_1 - \frac{q}{100} G_1 = G_1 \left(1 - \frac{q}{100} \right)$, prej ku $G_1 = \frac{G}{1 - \frac{q}{100}}$, pra me barazim kemi

$$G \left(1 + \frac{p}{100} \right) = \frac{G}{1 - \frac{q}{100}} \text{ domethënë } 1 + \frac{p}{100} = \frac{1}{1 - \frac{q}{100}}.$$

Detyra

1. Nëse supozojmë se dikush ka deponuar shumën prej 2800 euro në bankë me normë të interesit vjetor prej 6,5%. Cakto sa do të jetë shuma dhe interesi pas 5 vjet, nëse interesi është vjetor dhe dekurziv.

2. Cila shumë do të fitohet nëse deponohen 51400 denarë për 8 vjet me interes vjetor dekurziv 6%, nëse interesi është vjetor.

3. Cila shumë është deponuar në bankë, nëse pas 2 vjet me interes vjetorë dekurzive prej 3% janë paguar 27500 denarë.

4. Shndërroi në interes dekurziv, anticipativ prej 7% .

5. Shndërroi në interes anticipativ, dekurziv prej 6% .

6. Një sasi e njëjtë e kredisë mund të shfrytëzohet prej dy bankave. Banka e parë lejon kredi me interes vjetor dekurziv 6%, kurse banka e dytë me interes vjetor anticipative 5,5%. Cila bankë krediton në mënyrë më të volitshme, nëse afati i kthimit të kredisë është një vit.

3.2. Formulatat për njehsimin e interesit të përbërë

Të kthehemi te hapat të cilat i kryejmë kur njehsojmë interes të përbërë. Ta shënojmë kapitalin fillestar me G_0 . Atëherë pas kohës së caktuar t ai kapital është bërë

$$G_1 = G_0 + \frac{p}{100} G_0 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Në periudhën vijuese ai kapital është $G_2 = G_1 + \frac{p}{100} G_1 = G_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$. Me zëvendësim e G_1 te barazia e fundit fitohet

$$G_2 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Pas numrit të caktuar të periudhave n të cilat fitohen kur prej kohës t , kapitali do të bëhet

$$G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Nëse zëvendësojmë $r = 1 + \frac{p}{100}$, pra $G_n = G_0 r^n$.

Numri r quhet **faktori i interesit dekurziv** dhe nëse zëvendësojmë $G_0 = 1$ dhe $n = 1$, atëherë $r = G_1$, që do të thotë se ai numër na tregon për një periudhë me normë të interesit p sa është rritur vlera e një njësie parash.

Në këtë mënyrë fitohet formula me të cilën caktohet interesi i përbërë, ku G_0 është kapitali fillestar, r është faktori dekurziv dhe n është numri i periudhave.

Shembulli 1. Shuma prej 35000 denarë me interes vjetor për 4 vite është bërë 47441 denarë. Ta caktojmë vlerën e interesit të vjetor dekurziv.

Dihet se $G_0 = 35000$ denarë, $n = 4$ vjet dhe $G_4 = 47441$ denarë. Me zëvendësimin te formula për interes të përbërë $G_4 = G_0 r^4$ fitohet $r^4 = \frac{G_4}{G_0}$ domethënë

$r^4 = 1,355457143$. Pas rrënjëzimit kemi $r = 1,079$. Prej formulës $r = 1 + \frac{p}{100}$ fitohet $p = 100(r - 1)$ domethënë $p = 7,9\%$.

Mund të realizojmë edhe formulë direkte me ndihmën e të cilës do të caktojmë madhësinë e normës së interesit, domethënë

$$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right).$$

Shembulli 2. Kapitali 3256800 denarë është deponuar me interes prej 5% (pa)d. Në sa vite është realizuar interesi, nëse është fituar shuma prej 7420000?

Sipas të dhënave të dhëna me zëvendësimin te formula për interes të përbërë fitohet $7420000 = 3256800r^n$, pra $r^n = 2,2783$, kurse prej $r = 1 + \frac{p}{100}$ kemi se

$r = \frac{105}{100} = 1,05$. Domethënë $1,05^n = 2,2783$. Pra $n = \log_{1,05} 2,2783$ domethënë

$$n = \frac{\lg 2,2783}{\lg 1,05} \approx 16,88 \text{ vjet.}$$

Mund të realizojmë edhe formulë direkte me të cilën mund të njehsohet periudha domethënë.

$$n = \frac{\lg G_n - \lg G_0}{\lg r}, \text{ ku } r = 1 + \frac{p}{100} \text{ është faktor i interesit dekurziv.}$$

Mund në periudha të ndryshme të ndryshon lartësia e normës të interesit gjatë interesit.

Shembulli 3. Kapitali prej 15000 euro është deponuar në bankë. Ta gjejmë lartësinë e kapitalit pas 5 vjet, nëse dy vitet e para norma e interesit është 5% (pa)d, kurse tre vitet vijuese është 5, 5% (pa)d.

Prej kushtit vijon $G_0 = 15000$ euro, $n_1 = 2$, $p_1 = 5\%$, $n_2 = 3$, $p_2 = 5,5\%$, kurse duhet të caktohet G_5 . Prej formulës për interes të përbërë fitohet se $G_5 = G_0 r_1^{n_1} r_2^{n_2}$, ku $r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = \frac{105}{100} = 1,05$, $r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1,055$. Domethënë $G_5 = 15000 \cdot 1,05^2 \cdot 1,055^3 = 19419,02$ euro.

Detyra

1. Njehso vlerën e interesit vjetor dekurzive, nëse shuma prej 120000 denarë me interes vjetor dekurzive për 6 vjet është bërë 170200 denarë.

2. Njehso vlerën e interesit vjetor dekurziv, nëse shuma prej 560 euro me interes vjetor për 10 vjet është rritur për 50 euro.

3. Kapitali 15678 denarë është deponuar me interes prej 7% (pa)d. Në sa vjet është realizuar interesi, nëse ajo është vjetore dhe dekurzive dhe është fituar shuma prej 19345 denarë?

4. Shuma prej 180000 denarë është deponuar me interes prej 7% (pa)d. Pas sa vjet do të fitohet shuma prej 200000 denarë?

5. Njehso sa do të zmadhohet kapitali prej 150000 denarë për kohën prej 3 vjet, nëse norma e interesit të vitit të parë është 3%, të dytë 4% dhe të tretë 5%. Interesi është vjetor dhe dekurziv.

6. Në sa do të rritet shuma prej 100000 denarë e deponuar në bankë në 3 vjet, nëse norma e interesit të vitit të parë është 2%(pa)d, viti i dytë 3%(pa)d, viti i tretë 2,5%(pa)d?

3.3. Zbatimi i interesit të përbërë

Sikurse vërejtëm nëpër të gjitha shembujt paraprak, përveç mënyrës së njehsimit të interesit, faktor i rëndësishëm gjatë këtij njehsimi është edhe periudha e interesit.

Shembulli 1. Sa do të jetë shuma prej 500 euro i deponuar në bankë pas 2 vjet me interes prej 6% (ps)d ?

Dihet se $G_0 = 500$, $p = 6\%$, $n = 2 \cdot 2 = 4$ periudha, pra prej formulës për interes të përbërë kemi $G_4 = G_0 \cdot r$, domethënë $500 \cdot 1,06^{10} = 631,24$ denarë (figura 1).

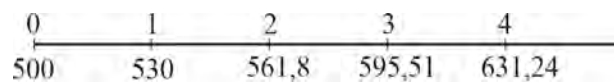


Figura 1

Shpesh në praktikë koha nuk është njëjtë me numrin të interesit, kurse paraqiten ndonjë shmangie është shprehur te numri i muajve ose ditëve.

Shembulli 2. Interesi i caktuar zgjat 3 vjet dhe 9 muaj. Të caktojmë numrin e periudhave n nëse interesi është gjysmëviti.

Në 3 vite dhe 6 muaj ka 7 periudha, kurse të tjerat 3 muaj janë gjysma prej interesit, pra nëse me t e shënojmë kohën, atëherë $t = n + s$, ku s është ajo pjesë prej interesit që nuk është ditë e plotë prej periudhës. Në këtë rast

$$t = 7 + \frac{1}{2}.$$

Në rastin e këtillë interesi njehsohet ashtu që së pari njehsohet interesi i përbërë për numrin e plotë të periudhave, kurse pastaj në atë shumë të fituar caktohet interesi për kohën tjetër.

Shembulli 3. Do ta caktojmë lartësinë e zmadhimit të kapitalit prej 5000 denarë të interesit me normë të interesit prej 5% për kohën prej 5 vjet dhe 6 muaj, nëse interesi është vjetore dhe dekurzive.

Pasi $t = 5 + \frac{1}{2}$ së pari do të njehsojmë $G_5 = 5000 \cdot 1,05^5$. Pastaj për këtë shumë

caktojmë interes të thjeshtë $\frac{G_5 \cdot 5 \cdot 0,5}{100}$. Përfundimisht fitohet se

$$G_t = G_5 + \frac{G_5 \cdot 5 \cdot 0,5}{100} = G_5 \left(1 + \frac{5 \cdot 0,5}{100} \right) \text{ domethënë } G_t = 5000 \cdot 1,05^5 \cdot 1,025 = 6541 \text{ denarë.}$$

Prandaj, formula me të cilën do ta caktojmë interesin e përbërë kur koha nuk është numër i plotë domethënë $t = n + s$, ku n është numri i periudhave, kurse s është koha që është një pjesë prej periudhës është $G_t = G_0 r^n \left(1 + \frac{p \cdot s}{100} \right)$.

Në praktikë, shpesh interesi kryhet disa herë gjatë vitit. Është e nevojshme ndryshimi përkatës të formulës për llogarinë e interesit të përbërë. Në çdo detyrë dihet periudha e interesit dhe norma e interesit për atë periudhë quhet **norma e interesit nominal**, kurse nëse interesi kryhet për pjesë prej atij periudhe, atëherë norma e interesit është **relative**. Kjo fitohet si herës prej pjesve nominale dhe numrit të cilat është domethënë nëse interesi nominal është viti, atëherë interesi gjysmëvjet relativ është $\left(\frac{p}{2}\right)\%$. Kjo do të thotë edhe se nëse interesi nominal është $p\%$ atëherë interesi vjetor relativ është $(12 \cdot p)\%$.

Shembulli 4. Cakto sa është kapitali prej 50000 denarë, pas 5 vjet me 6% (pa)d nëse interesi është:

a) vjetore b) gjysmëviti c) kuartal.

Kemi:

$$a) G_0 = 50000, n = 5, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06, \text{ pra } G^5 = 50000 \cdot 1,06^5 = 66911,3 \text{ denarë,}$$

$$b) G_0 = 50000, n = 10, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,03, \text{ pra } G_{10} = 50000 \cdot 1,03^{10} = 67195,8$$

denarë,

$$c) G_0 = 50000, n = 20, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,015, \text{ pra } G_{20} = 50000 \cdot 1,015^{20} = 67342,75$$

denarë.

Detyra

1. Sa do të jetë shuma prej 2000 denarë të deponuar në bankë pas 10 vjet me interes prej 3% (pa)d ?
2. Shuma prej 10000 euro është deponuar në bankë me interes vjetor dhe normë të interesit 2% (pa)d. Cakto lartësinë e kapitalit pas 12 vjet dhe 5 muaj.
3. Për sa do të zmadhohet shuma prej 1000000 denarë, pas 7 vjet me 8% (pa)d nëse interesi është kuartale?
4. Njehso normën e interesit vjetor dekurzive me cilën shumë prej 150000 euro do të zmadhohet në 250000 euro me interes gjysmëviti.
5. Në cilën shumë do të zmadhohet 780000 denarë për periudhën prej 10 vjet me 6% (pa)d, nëse interesi është mujor?
6. Në vitin 2020 në bankë është deponuar shuma prej 10000 euro me normë të interesit prej 8% (pa)d. Sa sasi do të ketë ajo shumë në vitin 2030 me:

- a) interes vjetor b) interes semestral
c) interes kuartal?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Nëse supozojmë se dikush ka deponuar shumën prej 4000 euro në bankë me normë vjetore të interesit prej 8%. Cakto sa do të bëhet shuma dhe interesi pas 2 vjet, nëse interesi është i përbërë, vjetore dhe dekurzive.
2. Cakto sa do të jetë shuma e deponuar në bankë, nëse pas 3 vjet me interes vjetor prej 1% janë paguar 10000 denarë
3. Shndërroje në interes dekurziv, anticipativ prej 10% .
4. Shuma prej 12750 denarë me interes vjetor për 3 vjet është bërë 24200 denarë. Cakto vlerën e interesit vjetor, nëse bëhet fjalë për interes dekurziv.
5. Kapitali 1300 euro është deponuar me interes prej 7% (pa)d. Në sa vjetë është krye interesi, nëse ai është vjetore dhe dekurzive dhe është fituar shuma prej 1700 denarë?
6. Njehso sa është zmadhuar kapitali prej 1000 denarë për kohën prej 8 vjet, nëse dy vitet e para norma e interesit është 5%, viti i tretë, i katërt dhe i pestë është 6% dhe vitet e tjera është 7%. Interesi është vjetore dhe dekurzive.
7. Sa do të jetë shuma prej 3000 denarë të deponuar në bankë pas 5 viteve me interes prej 4% (ps)d ?
8. Shuma prej 10000 euro është deponuar në bankë me interes vjetor dhe normë të interesit 5% (pa)d. Cakto lartësinë e kapitalit pas 10 vjet dhe 7 muaj.
9. Në bankë është deponuar shuma prej 100000 denarë me normë të interesit prej 3% (pa)d. Sa sasi do të ketë ajo shumë për 20 vjet merr:

a) interes vjetor	b) interes semestral
c) interes kuartal	c) interes mujor?
10. Janë deponuar 10000 denarë me 10% normë interesit vjetor. Sa vlerë do të arrin ai deponim pas 5 vjet me interes që është vjetore dhe dekurzive?
11. Interesi është vjetor dhe dekurziv, kurse banka ka normë të interesit vjetor prej 10%. Sa do të jetë kapitali prej 15000 euro, pas 3 vjet?
12. Një milion denarë janë deponuar në bankë tre vjet me katër përqind interes vjetore. Sa është ndryshimi prej interesit me llogarinë e përbërë dhe të thjeshtë?
13. Kapitali prej 2500 euro, për një vit me interes vjetor dekurziv prej 150 euro e njehsuar me llogari të interesit të thjeshtë. Sa interes do të sjell kapitali i njëjtë, për kohën e njëjtë dhe me normën e njëjtë të interesit, e njehsuar me llogarinë e interesit të përbërë?
14. Për sa vite kapitali prej 50000 euro me interes semestral dekurziv me normë të interesit prej 9% do të ketë vlerë të njëjtë sikurse edhe kapitali prej 60000 euro me interes kuartal prej 6%, nëse njehsohet interesi relativ?

4. INDUKSIONI MATEMATIKOR

4.1. Induksioni matematikor

Bashkësia e numrave natyror është renditur me “<”, domethënë. me “≤” në këtë mënyrë:

$n < m$ nëse dhe vetëm nëse $m - n$ është numër natyror, dhe

$n \leq m$ nëse dhe vetëm nëse $m - n$ është numër natyror ose zero.

Renditja “<” quhet **renditje rigoroze e numrave natyror**, kurse “≤” quhet **renditje e mirë** (ose **lineare**) të bashkësisë së numrave natyror. Te “≤” çdo dy numra natyror janë të krahasueshme.

Kështu kemi $1 < 2 < 3 < \dots$, domethënë $1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$ por $1 \leq 1$ dhe $1 \not\leq 1$.

Koncepti “induksion” paraqet sjellja e përfundimit “prej të veçantës nga e përgjithshmja”. Përveç në jetën e përditshme, kurse edhe në të gjitha shkencat e tjera, kur me shqyrtimin e ndonjë vetie që e cila është e saktë në shumë raste, vjen deri te supozimi se ajo veti është e saktë për të gjitha rastet. Për vërtetimin se vetia e kështillë është e saktë në të gjitha rastet, shpesh shfrytëzohet induksioni matematikor. Por, shpeshherë në matematikë, një ligjshmëri mund të jetë e kontrolluar për numër të madh të rasteve, kurse kjo nuk do të thotë se ai është i saktë në çdo rast.

T’i shqyrtojmë anëtarët e parë të vargut të numrave anëtari i përgjithshëm i të cilit është $a_n = n^2 - n + 41$. Ato janë numrat $a_1 = 41, a_2 = 43, a_3 = 47, a_4 = 53, a_5 = 61, a_6 = 71, a_7 = 83, a_8 = 97$. Vërejmë se të gjithë ato janë numra të thjeshtë. Kjo mund të na çon të supozojmë se të gjithë anëtarët e këtij vargu janë numra të thjeshtë. Mund të kontrollojmë se të gjithë anëtarët deri te $a_{40} = 1601$ janë numra të thjeshtë. Por, kjo nuk do të thotë se të gjithë anëtarët e atij vargu janë numra të thjeshtë. Anëtari i dyzet e një është $a_{41} = 41 \cdot 41$, kurse ai nuk është numër i thjeshtë.

Domethënë, një ligjshmëri nëse është i kontrolluar për numër të madh të rasteve, nuk do të thotë se është vërtetuar, kurse mund të jetë supozim se ai është gjithmonë i saktë.

Shembulli 1. Të shkruajmë disa anëtar të vargut, anëtari i përgjithshëm i të cilit është:

$$a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

$$a_1 = 1 = 1^2$$

$$a_2 = 1 + 3 = 2^2$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Vërejmë se anëtari n është katror prej n . Prandaj supozojmë se anëtari i përgjithshëm i këtij vargu është $a_n = n^2$, përkatësisht shuma e n numrave të parë tek $a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ është i barabartë me n^2 .

Me ndihmën e induksionit matematikor (cili është njëra prej vetive themelore të bashkësisë së numrave natyror) do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për çdo numër natyror n .

Të supozojmë se gjykimi është i saktë për të gjithë $n \leq k$, pra $a_k = k^2$. Pra për $n = k + 1$, $a_{k+1} = a_k + (2k + 1) \stackrel{s.i.}{=} k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, Përkatësisht gjykimi është i saktë edhe për $n = k + 1$.

Mënyra e shqyrtuar e vetisë paraprake është baza e **parimi i imduksionit matematikor (PIM)** që shprehet në këtë mënyrë:

Le të jetë $T(n)$ gjykimi i cili varet prej numrit natyror n . Nëse:

1) gjykimi $T(n)$ është i saktë për $n = 1$ dhe

2) prej supozimit induktiv se edhe $T(k)$ është i saktë, $T(k + 1)$ është i saktë, mund të vërtetohet; atëherë vijon se gjykimi $T(n)$ është i saktë për çdo numër natyror n .

Shembulli 2. Vërteto se për çdo numër natyror n është i saktë barazimi:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Do ta shfrytëzojmë parimin e induksionit matematikor:

1) për $n = 1$ kemi: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, që do të thotë se gjykimi është i saktë për $n = 1$;

2) supozojmë se barazia është e saktë për $n = k$, përkatësisht

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1) \cdot (2k+1)}{6}.$$

Do ta vërtetojmë se është e saktë edhe për $n = k + 1$, përkatësisht se:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+1+1) \cdot (2(k+1)+1)}{6} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Kemi se

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &\stackrel{s.i.}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1) \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \\ &= (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Prej parimit të induksionit matematikor vijon se barazia është e saktë për çdo numër natyror n .

Shembulli 3. Gjeje shumën $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, për çdo numër natyror n .

Për ta gjetur shprehjen me të cilin njehsohet S_n , për çdo n , së pari do të gjejmë disa shuma:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Prej disa shumave të shënuara mundemi të vërejmë se fitohen thyesa numëruesi i të cilëve është shuma prej numëruesve të mbledhësve, kurse emëruesi është për një më i madh se numëruesi.

Supozojmë se $S_n = \frac{n}{n+1}$, për çdo numër natyror n .

Për ta kontrolluar saktësinë e barazisë $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ do ta shfrytëzojmë parimin e induksionit matematikor.

- 1) Për $n = 1$ barazimi është i saktë
- 2) Supozojmë se është i saktë për $n = k$, përkatësisht:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Do të vërtetojmë se është i saktë edhe për $n = k + 1$, përkatësisht

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Me të vërtetë:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \stackrel{s.i.}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Domethënë, sipas parimit të induksionit matematikor, mund të përfundojmë se barazimi $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ është i saktë për çdo numër natyror n .

Detyra

Vërteto se barazimet te detyrat prej 1 deri te 4 janë të saktë për çdo numër natyror n .

$$1. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$2. \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

$$3. \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

$$4. \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

4.2. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të identiteteve

Ndonjëherë gjatë vërtetimit të identiteteve duhet të bëhen transformime plotësuese, kurse pastaj të shfrytëzohet parimi induktiv. Vijnë disa shembuj të cilët tregohet zbatimi i SIM.

Shembulli 1. Vërteto se shuma e të gjithë këndeve të brendshme të n – këndëshit njehsohet me formulën $S_n = (n - 2) \cdot 180^0$.

Vërtetimin do ta realizojmë me induksionin matematikor.

1) Është e qartë se hapi i parë është kontrolli se ky gjykim a vlen për $n=3$, pasi që trekëndëshi është shumëkëndëshi më vogël/Shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshi është $180^0 = (3 - 2) \cdot 180^0$.

2) Të supozojmë se kjo formulë vlen për n –këndësh, $n \in \mathbb{N}$.

3) E dimë se për n është numri i kulmeve të shumëkëndëshi, prandaj $n + 1$ -këndëshi ka një kulm më shumë se n -këndëshi dhe të ai për shumën vlen $S_n = (n - 2) \cdot 180^0$. Kulmi i dhënë do të thotë se shtojmë edhe një trekëndësh domethënë shtojmë të shuma edhe 180^0 , pra prej supozimit induktiv vijon

$$S_n + 180^0 \stackrel{s.i.}{=} (n-2) \cdot 180^0 + 180^0 = (n-1) \cdot 180^0 = ((n+1)-2) \cdot 180^0 = S_{n+1}.$$

Sipas PIM përfundojmë se formula vlen për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Shembulli 2. Vërteto se $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$, për çdo numër natyror n .

1) Për $n = 1$, të ana e majtë fitohet $\cos x \cdot \cos 2x = \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$,

por ana e djathtë fitohet $\frac{\sin 4x}{4 \sin x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{4 \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2 \sin x}$.

Domethënë barazimi vlen për $n = 1$.

2) Supozojmë se është i saktë për $n = k$, përkatësisht:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x}.$$

3) Do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë edhe për $n = k + 1$, përkatësisht

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1} x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x} \cdot \cos 2^{k+1} x.$$

Me transformimin e prodhimit prej anës së djathtë dhe me zbatimin e supozimit induktiv fitohet

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1} x &\stackrel{s.i.}{=} \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x} \cdot \cos 2^{k+1} x = \\ &= \frac{2 \cdot \sin 2^{k+1} x \cdot \cos 2^{k+1} x}{2 \cdot 2^{k+1} \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2 \cdot 2^{k+1} x}{2^{(k+1)+1} x} = \frac{\sin 2^{(k+1)+1} x}{2^{(k+1)+1} x}. \end{aligned}$$

Këtu do ta shfrytëzojmë se $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$.

Shembulli 3. Vërteto se nëse $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, atëherë $x^n = \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$, për çdo $n \in \mathbb{N}$.

1) Për $n = 1$, vlen $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$.

2) Të supozojmë se gjykimi është i saktë për $n = k$, përkatësisht

$$x^k + \frac{1}{x^k} = 2 \cos k\alpha$$

3) Për $n = k + 1$ me shfrytëzimin e supozimit induktiv kemi se

$$\begin{aligned} \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) &= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \quad s.i. \\ &= 2 \cos k\alpha \cdot 2 \cos \alpha - 2 \cos (k-1)\alpha = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(k\alpha + \alpha) + \cos(k\alpha - \alpha)) - 2 \cos (k-1)\alpha = \\ &= 2 (\cos(k\alpha + \alpha) + \cos(k\alpha - \alpha) - \cos(k-1)\alpha) = \\ &= 2 \cos(k+1)\alpha \end{aligned}$$

E shfrytëzojmë barazimin $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$.

Shembulli 4. Vërteto se $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, ku $x \neq 1$, vlen për çdo numër natyror n .

1) Gjykimi është i saktë për $n = 1$.

2) Të supozojmë se gjykimi është i saktë për $n = k$, përkatësisht

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}, \text{ ku } x \neq 1.$$

3) Për $n = k + 1$ me shfrytëzimin e supozimit induktiv kemi se

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + x^{k+1} &= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \\ &= \frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+2} - x^{k+1}}{x - 1} = \frac{x^{(k+1)+1} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Domethënë se barazimi vlen për çdo numër natyroroj.

Detyra

1. Vërteto se numri i përgjithshëm i diagonaleve të n -këndëshi njihet me formulën $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

2. Vërteto se për çdo numër natyror vlen

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

3. Vërteto se $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n\text{-herë}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.

4.3. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të pabarazimeve

Zakonisht kur janë në pyetje pabarazime mund të ndodh pabarazime të caktuara të vlen duke filluar prej ndonjë numri natyror k . Shpesh teknika e shfrytëzuar e vërtetimit kur janë pabarazimet në pyetje është nëse ndonjë gjykim duhet të vërtetohet për. $P(n)$, për të gjithë $n \geq k$, atëherë pas kontrollit për $P(k)$, supozojmë se pabarazimit $P(m)$ vlen për ndonjë numër natyror $m \geq k$ dhe kontrollojmë që vlen për $P(m+1)$.

Shembulli 1. Vërteto se $2^n \geq n^2$ për të gjithë numrat natyror $n \geq 4$.

1) Për $n = 4$, kemi $2^4 = 16 \geq 4^2$.

2) Të supozojmë se për ndonjë numër natyror $n = k$ vlen $2^k \geq k^2$.

3) Për $n = k+1$ prej supozimit induktiv vijon se

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \geq k^2 \cdot 2 \stackrel{\text{i.n.}}{=} k^2 + k^2 \geq 2k + 1 + k^2 = (k+1)^2$$

I shfrytëzojmë pabarazitë $k^2 = k \cdot k \geq 4 \cdot k > 3k = 2k + k > 2k + 1$

Shembulli 2. Vërteto se për çdo numër natyror $n \geq 3$ vlen $3^n > 2^n + 3n$.

1) Për $n = 3$ kemi $3^3 = 27 > 17 = 8 + 9 = 2^3 + 3 \cdot 3$.

2) Të supozojmë se vlen për ndonjë numër natyror $n = k$ vlen $3^k > 2^k + 3k$.

3) Për $n = k+1$ kemi se $3^k > 3$. Prej supozimit induktiv vijon se $3^{k+1} \stackrel{s.i.}{>} 2^k + 3k$,

pra nëse shumëzojmë me 2 kemi $3^k \cdot 2 > 2^{k+1} + 6k$. Me mbledhjen e të dy pabarazimeve $3^k \cdot 2 > 2^{k+1} + 6k$ dhe $3^k > 3$ kemi

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 = 3^k \cdot 2 + 3^k > 2^{k+1} + 6k + 3 > 2^{k+1} + 3(k+1)$$

me të cilën është vërtetuar pabarazimi.

Shembulli 3. Vërteto se për çdo numër natyror n vlen

$$\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

Gjatë vërtetimit të pabarazimeve zakonisht shfrytëzohen shënime speciale me të cilat thjeshtësohet zbatimi i parimit, pra do të marrim se

$$A_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}.$$

1) Për $n = 1$, kemi $A_1 = \sqrt{1} = \sqrt{1} + 1$. Që do të thotë se pretendimi është i vërtetë.

2) Të supozojmë se vlen për ndonjë numër natyror $n = k$ domethënë $A_k < \sqrt{k} + 1$.

3) Për $n = k+1$ me ndihmën e këtij supozimi duam të vërejmë çka vijon për A_{k+1} . Kemi se

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \sqrt{(k+1) + A_k} \stackrel{s.i.}{<} \sqrt{(k+1) + \sqrt{k} + 1} < \sqrt{(k+1) + 2\sqrt{k+1} + 1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{k+1} + 1)^2} = \sqrt{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Këtu e shfrytëzuam pabarazimin $\sqrt{k} < \sqrt{k+1} < 2\sqrt{k+1}$.

Detyra

1. Vërteto se për çdo numër natyror n , vlen $n < 2^n$.
2. Vërteto se $2^n > 10n^2$, për $n \geq 10$.
3. Vërteto se $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}} < 3$.

4.4. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të plotpjesëtueshmërisë

Shembulli 1. Vërteto se çdo numër natyror më i madh se një mund të shkruhet si prodhim prej numrave të thjeshtë dhe numrit 1.

1) Numri 2 është numri i parë natyror më i madh se 1, pra e kontrollojmë gjykimin për atë. Prej kësaj që $2 = 2 \cdot 1$, vërejmë se gjykimi është i plotësuar.

2) Të supozojmë se $n = k$ është numër natyror për të cilin vlen kërkesa.

3) Atëherë $n = k + 1$ mund të jetë numër i thjeshtë ose i përbërë. Nëse $k + 1$ është numër i thjeshtë, atëherë gjykimi është vërtetuar. Nëse, tani, $k + 1$ është numër i përbërë, atëherë ai mund të shkruhet si prodhim të disa numrave natyror a dhe b , të atillë që $a > 1$, $b < n + 1$ dhe $ab = n + 1$. Prej ku a dhe b janë më të vegjëll $k + 1$, për ato vlen supozimi induktiv domethënë ato mund të shkruhen si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë.

Shembulli 2. Vërteto se për çdo numër natyror n , vlen $57 \mid (7^{n+2} + 8^{2n+1})$.

1) Për $n = 1$, kemi $7^{1+2} + 8^{2+1} = 343 + 512 = 855 = 57 \cdot 15$ që do të thotë gjykimi vlen.

2) Të supozojmë se vlen për ndonjë numër natyror $n = k$ vlen

$$57 \mid (7^{k+2} + 8^{2k+1}).$$

3) Të kontrollojmë çka ndodh për $n = k + 1$. Ta shqyrtojmë shumën

$$7^{k+1+2} + 8^{2(k+1)+1} = 7^{k+2} \cdot 7 + 8^{2k+1} \cdot 8^2 = 7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}.$$

Është e qartë se $57 \mid 7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1})$ sipas supozimit induktiv, prandaj edhe shuma $7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$ plotpjesëtohet me 57 me çka u vërtetua.

Shembulli 3. Le të jetë n numër natyror. Vërteto se te çdo bashkësi prej $2^{n+1} - 1$ numra të plotë mund të zgjedhim 2^n numra shuma e të cilëve plotpjesëtohet me 2^n .

1 Për $n = 1$ bashkësia ka $2^{n+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ elemente. Në bashkësinë prej tre numrave të plotë ose të paktën dy janë numra tek ose të paktën dy janë numra çift. Prandaj, zgjedhja e bashkësisë me dy elemente, në rastin e parë dy numra tek, kurse te i dyti dy numra çift, na jep shumën e cila është numër çift domethënë është i plotpjesëtueshëm me 2. Domethënë gjykimi vlen për $n = 1$.

2 Të supozojmë se gjykimi vlen për numrin natyror $n = k$, domethënë se prej bashkësisë me $2^{k+1} - 1$ mund të zgjedhim 2^k elemente shuma e të cilëve plotpjesëtohet me 2^k .

3) Duhet të vërejmë çka ndodh për $n = k + 1$, përkatësisht çka ndodh te bashkësia me $2^{k+2} - 1$ elemente. Prej ku vijon $2^{k+2} = 2^{k+1} \cdot 2 > 2^{k+1}$ vlen $2^{k+2} - 1 > 2^{k+1} - 1$, do të thotë se te bashkësia me $2^{k+2} - 1$ ekziston nënbashkësi me $2^{k+1} - 1$ elemente. Prej supozimit te ajo nënbashkësi mund të zgjedhim 2^k elemente shuma e të cilit plotpjesëtohet me 2^k . Ta shënojmë shumën e tij të elementeve me S .

Kur prej bashkësisë kemi veçuar 2^k elemente, atëherë te ai kanë ngelur

$$2^{k+2} - 1 - 2^k = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^{k+1} + 2^k - 1$$

elemente. Pasi $2^{k+1} + 2^k - 1 > 2^{k+1} - 1$, përsëri mund të zgjedhim nënbashkësi që ka $2^{k+1} - 1$ elemente dhe prej atij, sipas supozimit induktiv, të zgjedhim 2^k elemente shuma e të cilit plotpjesëtohet me 2^k . Shuma e tij le të jetë S_1 . Ngelin $2^{k+1} + 2^k - 1 - 2^k = 2^{k+1} - 1$ elemente, pra përsëri e zbatojmë supozimin dhe fitojmë 2^k elemente shuma e të cilëve plotpjesëtohet me 2^k . Shuma e tyre le të jetë S_2 . Të tri shumat S, S_1, S_2 plotpjesëtohen me 2^k , domethënë $S = 2^k \cdot a, S_1 = 2^k \cdot b$ dhe $S_2 = 2^k \cdot c$, ku a, b, c janë numra të plotë.

Prej diskutimit për tre numra të plotë, vijon se prej këtyre tre numrave mund të zgjedhim dy shuma e të cilëve është numër çift. Ato numra le të kenë a dhe b , domethënë $a + b = 2m$. Prandaj $S + S_1 = 2^k \cdot a + 2^k \cdot b = 2^k \cdot (a + b) = 2^k \cdot 2m = 2^{k+1}m$, ku m është numër i plotë. Nga ana tjetër bashkësia shuma e elementeve janë S dhe S_1 ka çdonjëra nga 2^k elemente, dhe janë disjunkte, pra unioni i tyre ka $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ elemente dhe $S + S_1$ Plotpjesëtohet me 2^{k+1} . Në mënyrë analoge veprohet nëse $a + c$ ose $b + c$ është çift.

Domethënë vërtetuar se mund të zgjedhen bashkësi me 2^{k+1} elementet shuma e të cilëve plotpjesëtohet me 2^{k+1} .

Detyra

1. Vërteto se numri $a_n = n^3 + 5n$ plotpjesëtohet me 3, për çdo numër natyror n .
2. Vërteto se numri $a_n = 2^{n+2} \cdot 3n + 5n - 4$ plotpjesëtohet me 25, për çdo numër natyror n .
3. Vërteto se $13 \mid (3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3})$ për çdo numër natyror n .
4. Vërteto se për çdo numër natyror n dhe k , shprehja

$$(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{4k-1} \text{ plotpjesëtohet me } n^5 + 1.$$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

Me induksion matematikor vërteto barazimet:

1. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.
2. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n + 1) \cdot (2n + 1)$.

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n+1}.$

4. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$

5. Vërteto se çdo numër natyror n vlen

$$2 + 16 + 56 + \dots + (3n-2) \cdot 2^n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}.$$

6. Vërteto se $3^n > n^4$, për çdo numër natyror $n > 7$.

7. Vërteto se $n^3 > 3n + 3$, për çdo numër natyror $n > 2$.

8. Vërteto se për çdo numër natyror n , $7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$.

9. Vërteto se për çdo numër natyror n , $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$.

10. Vërteto se për çdo numër natyror n , $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$.

5. NUMRAT KOMPLEKS

5.1. Përsëritje për numrat kompleks në formën algjebrike

Vitin e kaluar u njohe me bashkësinë e numrave kompleks. Në këtë temë do të kesh mundësi ta pasurosh njohurinë tënde prej bashkësive dhe të vëresh pse pikërisht këto numra janë segment i rëndësishëm nga njohuria për fizikanët dhe inxhinierëve të cilët punojnë në fushën e elektricitetit dhe magnetizmit, optikës dhe hidrodinamikës.

Bashkësia $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ quhet bashkësia e numrave kompleks.

Numrat kompleks zakonisht i shënojmë me shkronjat $z, w, u, \dots$ etj. Shënimi $z = a + bi$ quhet **forma algjebrike (standarde) e numrit kompleks**. Poashtu numri a quhet **pjesa reale**, kurse numri b quhet **pjesa imagjinare** e numrit kompleks $z = a + bi$ dhe i shfrytëzojmë shënimet $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Sikurse është zakonisht, $-bi$ e paraqet numrin e kundërt bi dhe me marrëveshje $a + (-bi) = a - ib$. Ky numër quhet **kompleks i konjuguar** i z dhe shënohet me $\bar{z}$. Domethënë $\bar{z} = a - ib$.

Në rrafshin Σ le të jetë dhënë sistemi kënddrejtë koordinativ xOy . Atëherë çdo pike $M \in \Sigma$ i përgjigjet çift i renditur të numrave real (a, b) , ku a është abshisa, kurse b – ordinata e pikës M (figura 1).

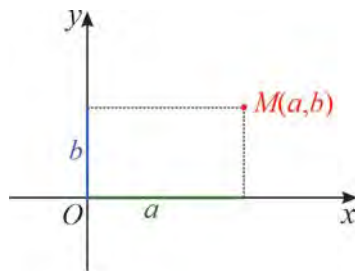


Figura 1

Nga ana tjetër, me çiftin e renditur të numrave real (a, b) , është dhënë një dhe vetëm një numër kompleks $z = a + bi$. Numrit kompleks $z = a + bi$, përkatësisht $z = (a, b)$ i përgjigjet (ia shoqërojmë) pikën $M(a, b)$ prej rrafshit koordinativ xOy (figura 1), dhe anasjelltas pikës $M(a, b)$ prej rrafshit koordinativ xOy është figura (përfaqësues gjeometrik) i numrit kompleks $z = a + bi$. Prandaj rrafshi koordinativ xOy i shfrytëzuar për paraqitje gjeometrike të numrave kompleks quhet edhe **rrafshi kompleks**.

Numrat realë $z = a + 0i = a$ të rrafshit kompleks i paraqesim me pikat e boshtit Ox , kurse shpesh numrat imagjinar $z = 0 + bi = bi$ me pikat e boshtit Oy (figura 2). Prandaj boshti Ox quhet edhe **boshti real**, por boshti Oy quhet **boshti imagjinar**. Pika që i përgjigjet njëshes imagjinare $i = 0 + 1i$ është $E(0, 1)$, kurse zeros komplekse $0 + 0i = 0$ i përgjigjet fillimi koordinativ $O(0, 0)$ (figura 2).

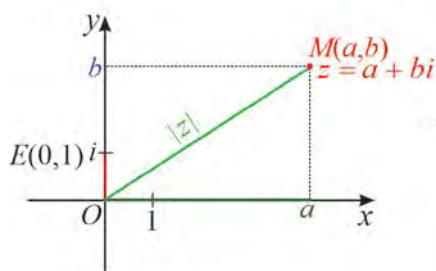


Figura 2

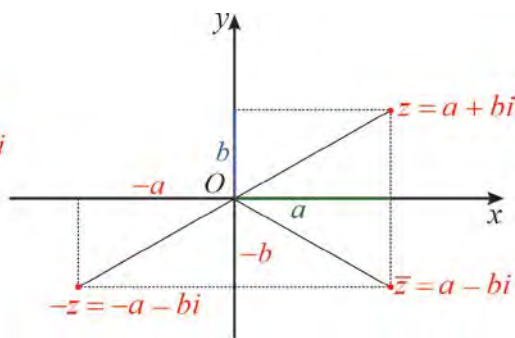


Figura 3

Numrat kompleks të konjuguar z dhe $\bar{z}$ gjithmonë janë dy pika simetrike në lidhje me boshtin real Ox , kurse i kundërti njëri ndaj tjetrit numra kompleks z dhe $-z = -a - ib$ janë dy pika simetrike në lidhje me fillimin koordinativ $O(0,0)$ (figura 3).

Moduli $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i numrit kompleks $z = a + bi$ është largësia e pikës $M(a,b)$ deri te fillimi i koordinatave O (figura 2).

Bashkësia e të gjitha numrave kompleks me të njëjtën:

- pjesë reale paraqet drejtëz paralele me boshtin Oy ;
- pjesë imagjinare paraqet drejtëz paralele me boshtin Ox ,
- modul $|z| = r, r > 0$ paraqet vijë rrethore me qendër në fillimin koordinativ $O(0,0)$ dhe rreze r .

Shembulli 1. Pjesët prej rrafshit kompleks xOy te të cilat shtrihen të gjitha pikat $z = x + yi$ që i plotësojnë kushtet:

a) $-1 < \text{Re}(z) \leq 2$; **b)** $1 \leq \text{Im}(z) < 3$; **c)** $|z| \leq 2$;

janë paraqitur të hijezuar te figura 4, figura 5 dhe figura 6, përkatësisht.

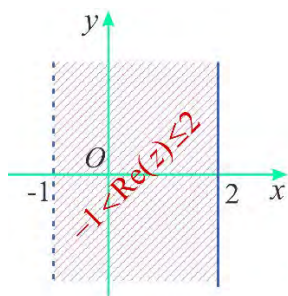


Figura 4

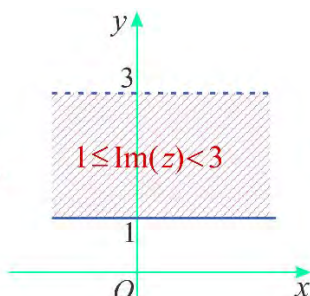


Figura 5

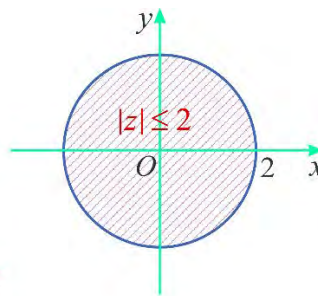


Figura 6

Numrave kompleks t'u japim edhe tjetër interpretim gjeometrik, pikërisht çdo numri kompleks $z = a + bi$ që i përgjigjet pikës $M(a,b)$ Mund të shqyrtohet edhe si vektor $\overrightarrow{OM}$ me koordinata (a,b) (figura 7). Në këtë mënyrë çdo numri kompleks $z = a + bi$ ($z \neq 0$) i korrespondon një dhe vetëm një vektor $\overrightarrow{OM}$, dhe anasjelltas çdo vektor $\overrightarrow{OM}$ është figura (përfaqësues) saktë i një numri $z = a + bi$. Prandaj operacionet mbledhje dhe zbritje të numrave kompleks mund të sillen në operacione përkatëse me vektorët.

Për shembull, nëse janë dhënë numrat $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ shuma e tyre është e barabartë me numrin $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

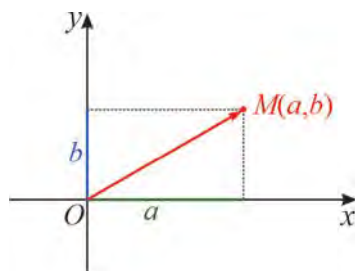


Figura 7

Nëse numrit kompleks z_1 i përgjigjet vektori $\overrightarrow{OM_1}$ me koordinatat e pikës të fundit $M_1(a_1, b_1)$, kurse numrit kompleks z_2 - vektori $\overrightarrow{OM_2}$ me pikën e fundit $M_2(a_2, b_2)$, atëherë shuma e vektorëve $\overrightarrow{OM_1}$ dhe $\overrightarrow{OM_2}$ do jetë vektori $\overrightarrow{OM}$ me fillim O dhe fund te kulmi i katërt i paralelogramit, që është konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{OM_1}$ dhe $\overrightarrow{OM_2}$ (figura 8).

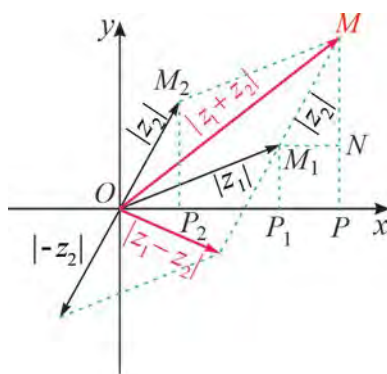


Figura 8

Nga përputhshmëria e trekëndëshave OP_2M_2 dhe M_1NM vijon se pika M do të ketë abshisë, $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} = a_1 + a_2$ dhe ordinatë,

$$\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} = b_1 + b_2.$$

Prandaj, pika M , përkatësisht vektori $\overrightarrow{OM}$ do t'i përgjigjet numrit kompleks $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, domethënë shumës së numrave kompleks $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$. Domethënë, nëse z_1 i përgjigjet vektori $\overrightarrow{OM_1}$, kurse numrit z_2 i përgjigjet vektori $\overrightarrow{OM_2}$, atëherë shumës $z_1 + z_2$ do t'i përgjigjet vektorëve $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, kurse ndryshimit $z_1 - z_2$ do t'i përgjigjet vektorëve $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

Nëse numrat kompleks z_1 , z_2 dhe z_3 i trajtojmë si vektor lehtë mund të tregohet se për mbledhjen e numrave kompleks vlejné ligji komutativ dhe asociativ (figura 9a dhe figura 9b).

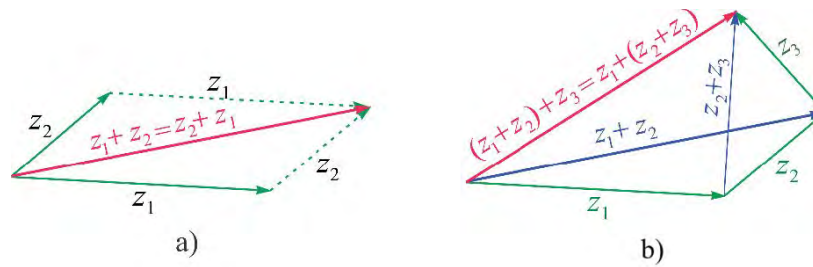


Figura 9

Detyra

1. Cakto pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks z nëse:

- a) $z = 4 + 2i$; b) $z = -3 + 4i$; c) $z = 3 - 2i$;
 ç) $z = -4 + \frac{1}{2}i$; d) $z = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{3})i$; dh) $z = 1 + \sqrt{2} + i$;
 e) $z = -3$; f) $z = -3i$.

2. Shkruaje në formën algjebrike numrin kompleks z nëse:

- a) $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$; b) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$, $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$;
 c) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$, $\operatorname{Im}(z) = 0$; ç) $\operatorname{Re}(z) = m + 1$, $\operatorname{Im}(z) = n - \sqrt{2}$.

3. Shkruaj në formën algjebrike numrat kompleks që u përgjigjen pikave:

$A(-2, 1)$, $B(0, -5)$, $C(-4, 0)$, $D(2, 2\sqrt{3})$.

4. Cakto bashkësinë e të gjithë pikave $z = x + iy$ prej rrafshit kompleks që i kënaqin kushtet:

- a) $\operatorname{Re}(z) \leq 0$; b) $-2 < \operatorname{Re}(z) \leq 5$; c) $\operatorname{Im}(z) \geq 3$; ç) $\operatorname{Im}(z) < 5$;
 d) $|z| = 3$; dh) $|z| \leq 4$; e) $1 \leq |z| \leq 3$; f) $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, $|z| \leq 2$.

5. Gjeji kushtet që i kënaqin të gjitha pikat (dhe vetëm ato) prej zonës së hijezuara te figura 10a, figura 10b dhe figura 10c.

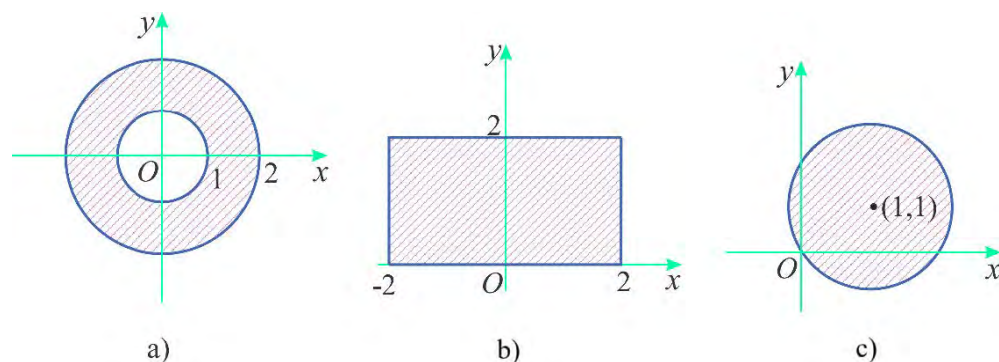
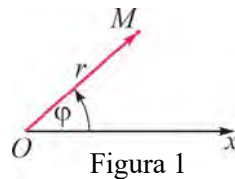


Figura 10

5.2. Koncepti për formën trigonometrike dhe eksponenciale të numrit kompleks

Pozita e çfarëdo pike M të rrafshit me ndihmën e sistemit koordinativ të Dekartit e caktojmë me koordinatat e saja. Përveç këtij sistemi koordinativ shpesh shfrytëzojmë edhe tjetër sistem të quajtur **sistemi polar koordinativ**. Atë e përcaktojmë kur te rrafshi zgjedhim pikë fikse O (**pol**) dhe gjysmëdrejtëz Ox (**boshti polar**) që del prej polit O . Pozita e pikës M në rrafsh e përcaktojmë me dy numra të cilët quhen **koordinata polare** dhe atë: gjatësia r e vektorit $\overrightarrow{OM}$ dhe këndi φ (i matur në radian), që ai vektor e formon me boshtin polar (figura 1).



Ekziston lidhja ndërmjet koordinatave të Dekartit (a,b) dhe koordinatave polare (r, φ) të një pike të rrafshit. Nëse sistemi polar koordinativ e vendosim ashtu që poli i tij O do të puthitet me fillimin e koordinatave $O(0,0)$, kurse boshti polar do të puthitet me kahen pozitive të boshtit të abshisë të sistemit të Dekartit (figura 2), atëherë prej përkufizimeve të funksioneve trigonometrike OMP kemi $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Prej këtu prej $r > 0$, vijon se

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

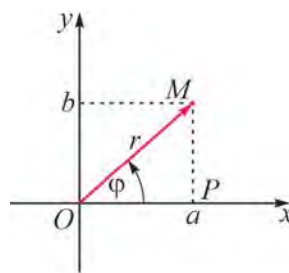


Figura 2

Këto barazime e japin lidhjen ndërmjet koordinatave të Dekartit dhe polare.

Deri tani vërejtëm se çdo numri kompleks z i korrespondon pikë e vetme M të rrafshit koordinativ, kurse te forma e tij algebrike $z = a + bi$, shfrytëzohen koordinatat e Dekartit (a,b) pikës M që i korrespondojnë numrit z . Me zbatimin e barazimeve, numri kompleks z mund ta shkruajmë edhe në këtë formë

$$z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i \quad \text{ose} \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ky shënim i numrit kompleks quhet **forma e tij trigonometrike**.

Gjatësia r e vektorit $\overline{OM}$ quhet **modul** ose vlera absolute e numrit kompleks z dhe shënohet $|z|$, kurse masa radiale e këndit φ që rrezevektori $\overline{OM}$ e formon me kahen pozitive të boshtit Ox quhet **argument** të numrit kompleks z dhe shënohet me $\text{Arg } z$. Prandaj, $|z| = r$, $\text{Arg } z = \varphi$, ku r dhe φ janë koordinata polare të pikës M , që i përgjigjet numrit z .

Moduli i çfarëdo numri kompleks z është numër real jonegativ, ku ai është i barabartë me zero vetëm për $z = 0$. Ai është i përcaktuar njëvlerësisht me pozitën e pikës M , domethënë për atë vlen $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Këndi φ , përkatësisht $\text{Arg } z$, mund t'i fiton çfarëdo vlera reale pozitive ose negative, ku këndet pozitive kanë kahe të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës. Argumenti nuk është përcaktuar vetëm për $z = 0 = 0 + i0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ për çdo φ . Sipas përkufizimit kemi $\text{Arg } 0 = 0$.

Argumenti i çfarëdo numri kompleks $z \neq 0$ ka pafund shumë vlera të cilat ndryshojnë njëra prej tjetrës për $2k\pi$, për tërë numrin k domethënë $\arg z = \{\text{Arg } z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Domethënë, nëse φ është argument i numrit z , atëherë edhe $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$ është, gjithashtu, argument i atij numri. Prej të gjitha atyre vlerave, zakonisht e zgjedhim vlerën e φ që e plotëson $-\pi < \varphi \leq \pi$ për të qenë φ njëvlerësisht i përcaktuar për çdo numër kompleks. Ajo vlerë quhet **vlera kryesore e argumentit** të numrit z dhe shënohet me $\arg z$, domethënë $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Ndonjëherë vlera kryesore e φ përkufizohet me $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Nëse numri kompleks është numër real domethënë $z = a + 0i = a$, atëherë $\varphi = 0$ (nëse $a > 0$) ose $\varphi = \pi$ (nëse $a < 0$).

Të përfundojmë, bashkësia e të gjitha numrave kompleks z me argumentin e njëjtë φ është gjysmëdrejtëza OM e cila me kahen pozitive të boshtit Ox e formon këndin φ , kurse bashkësia, pra prej të gjitha numrave kompleks z me modul të njëjtë $|z| = r$ është vija rrethore me qendër në fillim (poli) O dhe rrezja r .

Argumenti dhe moduli i numrit kompleks $z = a + bi \neq 0i$ caktojmë prej barazimit $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, ku shenjat e $\cos \varphi$ dhe $\sin \varphi$, përkatësisht prej shenjave të a dhe b konstatojmë se në cilin kuadrant shtrihet vlera e kërkuar e argumentit. Ndonjëherë, gjatë përcaktimit të r dhe φ është e dëshirueshme të shfrytëzojmë edhe vizatim përkatës.

Shembulli 1. Me ndihmën e figurës 3, lehtë fitohet

a) $|2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}$,

b) $|i| = |0 + i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$,

c) $|-2| = 2$, $\arg(-2) = \pi$.

Prandaj, kemi se

a) $2 - 2i = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$,

$$\text{b)} i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c)} -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

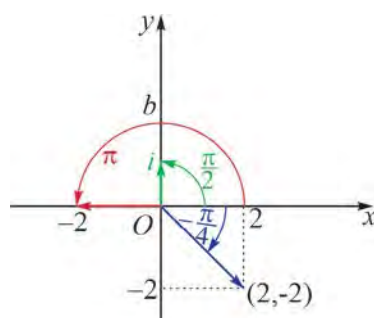


Figura 3

Shembulli 2. Ta shkruajmë në formën trigonometrike numrin kompleks $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Me ndihmën e formulave (2) kemi

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Prej këtu } \varphi = \frac{\pi}{3}. \text{ Domethënë: } 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

Shembulli 3. Këto numra kompleks t'i shkruajmë në formën trigonometrike:

$$\text{a)} z = -2\left(\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\right);$$

$$\text{b)} w = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{3}{4}\pi\right).$$

a) Numri kompleks z nuk është dhënë në formën trigonometrike, prandaj që moduli nuk mund të jetë numër negativ (-2) dhe pasi koeficienti i pjesës imagjinare të kllapa është $-\cos \frac{\pi}{5}$, kurse jo $\sin \frac{\pi}{5}$. Ta paraqesim numrin e dhënë

z në formën $z = 2\left(-\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}\right)$, për hir të barazisë $-2 = (-1) \cdot 2 = 2 \cdot (-1)$ dhe shumëzimi asociativ. Për ta paraqitur numrin z në formën trigonometrike, për argument të tij duhet të gjendet kënd i atillë φ që të jetë $\cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{5}$, $\sin \varphi = \cos \frac{\pi}{5}$.

Duke pasur parasysh se këndi φ është në kuadrantin II dhe për atë funksioni kalon në kofunksion, atëherë nuk është vështirë të konstatojmë se $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$.

$$\text{Me të vërtetë, } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5}.$$

Domethënë, forma trigonometrike e numrit z është:

$$z = 2\left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10}\right).$$

b) Numri kompleks w nuk është dhënë në formën trigonometrike pasi që funksionet kosinus dhe sinus nuk varen prej këndit të njëjtë φ . Këtu hasim në vështirësi të cilët në shumë raste (gjatë kalimit prej formës algjebrike në formë trigonometrike të numrit kompleks, dhe anasjelltas) është e pamundshme sipas vlerave të dhëna të sinusit dhe kosinusit të caktohet saktë këndi φ , domethënë për këndin e dhënë të shkruhen vlerat e sakta të sinusit dhe kosinusit të tij.

Pasi $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$, $\sin \varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$, forma trigonometrike e numrit kompleks z mund të shkruhet edhe në formën:

$$z = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)], k \in \mathbb{Z}.$$

Kjo do të thotë edhe se, dy numra kompleks $z_1 = a_1 + b_1i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2i$ të paraqitur në formën trigonometrike

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

janë të barabartë, nëse dhe vetëm nëse:

$$r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Për modulet dhe argumentet e dy numrave kompleks të konjuguar z dhe $\bar{z}$ vlejné barazimet:

$$\bar{r} = r, \bar{\varphi} = -\varphi, \text{ përkatesisht, } |\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Domethënë, forma trigonometrike e numrit të konjuguar $\bar{z}$ të numrit $z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$ do të thotë

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Në praktikë shpesh për caktimin e argumentit shfrytëzohen rregullat:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{nëse } a > 0 \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{nëse } a < 0, b \geq 0 \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{nëse } a < 0, b \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{nëse } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{nëse } a = 0, b < 0 \\ \text{e pacaktuar,} & \text{nëse } a = 0, b = 0 \\ \pi, & \text{nëse } a < 0, b = 0 \\ 0, & \text{nëse } a > 0, b = 0 \end{cases}$$

Shembulli 4. Numri kompleks $z = 4 + 3i$ i shënuar në formën trigonometrike është

$$z = 5(\cos 36,87^\circ + i \sin 36,87^\circ)$$

pasi $\varphi = \arctg \frac{3}{4} \approx 36,87^\circ$, kurse $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Përkufizojmë operacionin **fuqizimi i numrit e me numrin kompleks** $z = x + yi$ në këtë mënyrë:

$$e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Prandaj, për $x = 0$, fitohet $e^{yi} = \cos y + i \sin y$, e cila quhet **Formula e Ojlerit**.

$$\text{Poashtu vlen } |e^{x+yi}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Nëse $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ është çfarëdo numër kompleks i shënuar në formën trigonometrike, atëherë $z = re^{i\varphi}$ **forma eksponenciale** e atij numrin kompleks. Qartë, $\bar{z} = r (\cos \varphi - i \sin \varphi) = r (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$. Nëse i mbledhim, përkatësisht zbrësim z dhe $\bar{z}$ fitohen:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Shembulli 5. Ta shkruajmë në formën eksponenciale numrin $z = \sqrt{3} + i$.

Kemi se $r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pra $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Domethënë

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Detyra

1. Gjeji modulin dhe argumentin e numrave kompleks

a) $z_1 = \sqrt{3} - i$; **b)** $z_2 = 1 - i$; **c)** $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; **ç)** $z_4 = 2 + i\sqrt{12}$; **d)** $z_5 = 1 + i$.

2. Paraqiti në formën trigonometrike këto numra kompleks:

a) $z_1 = 1 - i \operatorname{tg} \alpha$; **b)** $z_2 = 1 + \sin \alpha + i \cos \alpha$; **c)** $z_3 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

3. Paraqiti në formën algjebrike numrat kompleks

a) $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; **b)** $8 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

4. Paraqiti në formën trigonometrike dhe eksponenciale numrat:

a) $-i$; **b)** $3i$; **c)** $2 + 2i$; **ç)** $3 \cos \frac{\pi}{6} - 3i \sin \frac{\pi}{6}$; **d)** $\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}$.

5. Është dhënë numri $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Paraqite në formën trigonometrike numrat z dhe $\bar{z}^{-1}$.

6. Konstato cili kusht është i nevojshëm që të plotësohet barazimi $z^2 = (\bar{z})^2$.

7. Cakto bashkësinë e të gjitha pikave $z = x + yi$ prej rrafshit kompleks që i plotëson kushtet:

a) $0 < |z| \leq 3$; **b)** $\arg z = \frac{\pi}{4}$; **c)** $|z| = 1$;

ç) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$; **d)** $0 \leq |z| \leq 5$ dhe $\arg z \leq \pi$.

5.3. Operacionet me numra kompleks në formën trigonometrike

Shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave kompleks thjeshtësohet nëse ato janë dhënë në formën trigonometrike.

Le të jenë $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ dy numra kompleks të dhënë në formën trigonometrike. Atëherë

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]$$

Prej trigonometrisë dimë formulat e njohura:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Prandaj, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ prej ku i fitojmë barazimet:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Prandaj, gjatë shumëzimit të numrave kompleks, modulet e tyre shumëzohen, kurse argumentet mbliidhen.

Prodhimi i shumë numrave kompleks të fundshëm

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \dots, z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

caktohet me ndihmën e barazimeve:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

Shembull 1. Cakto prodhimin e numrave kompleks:

$$z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), z_2 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}), z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}).$$

Kemi se

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})] = \\ &= 12(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 12[(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}))] = \\ &= 12(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 12(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 6(1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Për prodhimin e dy numrave kompleks të konjuguar z dhe $\bar{z}$ kemi:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = \\ &= r^2[(\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi))] = \\ &= r^2(\cos 0 + i \sin 0) = r^2(1 + i0) = r^2. \end{aligned}$$

Pasi $r = |z|$ fitojmë se $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Prej këtui, në rastin special, nëse $r = 1$, kemi $(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = 1$.

Me mënyrën analoge për herësin e numrave kompleks (1) për $z_2 \neq 0$, përkatësisht për $r_2 \neq 0$, kemi:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

Prandaj, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$

prej ku vijon se $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} \right|, \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$

Prandaj, gjatë pjesëtimit të numrave kompleks modulet pjesëtohen, kurse argumentet zbriten.

Shembulli 2. Cakto herësin e numrave kompleks:

$$z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \text{ dhe } z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}).$$

Kemi se

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{\sqrt{2}} [\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}) + i \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12})] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i. \end{aligned}$$

Shembulli 3. Cakto numrin reciprok $\frac{1}{z}$ të numrit $z \neq 0$.

Prej $\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} [(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))]$ fitojmë se

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = r^{-1} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Prandaj, kemi se $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg} z.$

Nëse $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ dhe $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ janë dy numra kompleks, atëherë prodhimi dhe herësi i tyre janë përkatësisht

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \text{ dhe } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Shembulli 4.a) Ta caktojmë prodhimin e numrave kompleks $z_1 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$

dhe $z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$. Në pajtim me vërejtjen e sipërme kemi se

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 5 \cdot 6 e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}} = 30 e^{-i\frac{\pi}{6}} = 30 (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = \\ &= 30 (\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = 30 (\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}) = 15\sqrt{3} - 15i \end{aligned}$$

b) Cakto herësin e numrave kompleks $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ dhe $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Në pajtim me vërejtjen e sipërme kemi se

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} e^{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{3}} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \\ &= 2 (\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Detyra

1. Gjeji prodhimin dhe herësin e numrave kompleks:

- a) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;
 b) $(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) \cdot \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$.

2. Cakto numrat:

- a) $z_1 \cdot z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$; c) $\frac{z_2}{z_1}$;

nëse $z_1 = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ dhe $z_2 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$.

3. Si ndryshon moduli dhe argumenti i numrit kompleks z , kur ai:

- a) shumëzohet me i ; b) pjesëtohet me i .

4. Cakto $z_1 \cdot z_2$, nëse:

- a) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ dhe $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;
 b) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ dhe $z_2 = 6(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$;
 c) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ dhe $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

5. Cakto herësin $\frac{z_1}{z_2}$, nëse:

- a) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ dhe $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$;
 b) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ dhe $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)$;
 c) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ dhe $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$;
 ç) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ dhe $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$.

6. Janë dhënë numrat kompleks $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- a) Transformoji numrat kompleks në formën eksponenciale.
 b) Shumëzoji dhe pjesëtoi numrat kompleks duke shfrytëzuar formën e tyre eksponenciale.

5.4. Fuqizimi i numrit kompleks në formën trigonometrike.

Formula e Moavrit

Nëse te formula për prodhim të numrit të fundshëm të numrave kompleks zëvendësojmë $z_1 = z_2 = \dots z_n$, ku $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, atëherë për çdo numër natyror n vlen:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Prandaj, gjatë fuqizimit të numrit kompleks z me tregues numër natyror n , moduli fuqizohet me atë tregues, kurse argumenti shumëzohet me treguesin e fuqisë, domethënë.

$$|z^n| = |z|^n = r^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z = n\varphi.$$

Shembulli 1. Për çdo fuqi $(1+i)^{12}$ kemi

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{12} = 2^6 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = \\ &= 64(\cos \pi + i \sin \pi) = 64(-1 + i \cdot 0) = -64. \end{aligned}$$

Për $r = 1$ formula e merr formën:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Kjo formulë luan rol të madh në matematikën elementare dhe quhet **formula e Moavrit**. Ajo vlen edhe kur treguesi i fuqisë është çfarëdo numër i plotë negativ, domethënë

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi).$$

Nëse kemi parasysh se $z^{-n} = (z^{-1})^n$, atëherë me zbatimin e formulës së Moavrit mbi numrin z^{-1} për $r = 1$ do ta fiton këtë formë.

Shembulli 2. T'i shprehim $\cos 3\varphi$ dhe $\sin 3\varphi$ nëpërmjet $\cos \varphi$ dhe $\sin \varphi$. e zëvendësimin për $n = 3$ te formula për fuqi të numrit kompleks fitohet

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \\ &= \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi). \end{aligned}$$

Dihet se dy numra kompleks janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse janë të barabartë përkatësisht, pjesët e tyre reale dhe imagjinare, pra vlen barazimi:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi \text{ dhe } \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Detyra

1. Është dhënë numri kompleks $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$. Cakto numrat:

a) z^4 ; **b)** z^6 ; **c)** z^{10} .

2. Gjeji numrin kompleks z^3 , nëse $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

3. Gjeji vlerën e shprehjes $z^4 + 1$ për $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

4. Thjeshto shprehjen:

a) $(1+i\sqrt{2})^5 - (1-i\sqrt{2})^5$; **b)** $(\sqrt{3}+i)^6 - (\sqrt{3}-i)^6$; **c)** $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

5. Kryeje fuqizimin:

a) $(1+i\sqrt{3})^{30}$; **b)** $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{20}$.

5.5. Rrënjëzimi i numrave kompleks

Tani do të tregojmë se si mund të caktohet rrënja prej numrit kompleks për formën trigonometrike të dhënë, që në masë të madhe e lehtëson mënyrën në lidhje me njehsimin e rrënjës prej numrit kompleks të dhënë në formën algebrike.

Të caktojmë rrënjë n prej numrit kompleks $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Të supozojmë se rrënja n e kërkuar është ndonjë numër kompleks $w = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ me modul ρ dhe argument θ .

Nëse numri w ekziston, ai patjetër ta kënaq relacionin $w^n = z$, përkatësisht $[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, përkatësisht

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Prej këtui, në bazë të kriterëve për barazi të dy numrave kompleks në formën trigonometrike, vijojnë relacionet: $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, ose

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Për modulin ρ fitojmë vlerë jonegative $\rho = \sqrt[n]{r}$, pasi $\sqrt[n]{r}$ e shqyrtojmë si rrënjë aritmetikore. Megjithatë, për argumentin θ të numrit kompleks të kërkuar w fitohen shumë pafund vlera, varësisht prej numrit të plotë k . Prandaj, numri kompleks i kërkuar w (rrënja n prej numrit kompleks të dhënë z), do të jetë:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

ku me w_k e shënojmë vlerën e w që i përgjigjet numri i plotë i zgjedhur k .

Megjithatë, për vlera të ndryshme të k jo gjithmonë do të fitosh edhe numra kompleks të ndryshëm w_k . Në realitet, gjatë zmadhimit të k për 1, argumenti

$$\theta_k = \text{Arg } w_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

do të zmadhohet për $\frac{2\pi}{n}$ radian, kurse për zmadhimin e k për n njësi, do të

zmadhohet për 2π . Por, pasi funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus janë periodike me periodë më të vogël 2π , kemi

Domethënë $\sqrt[n]{z} = w_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ku

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

Prandaj, rrënja n prej çfarëdo numri kompleks (real ose imagjinar) u përgjigjen n numra kompleks të ndryshme, të cilët fitohen prej formulës për $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, domethënë $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$.

Në veçanti te rrënja n prej numrit imagjinar të gjithë numrat n janë numra imagjinar, kurse te rrënja n prej numrit real a , prej të gjithë n numrave të ndryshëm, real janë vetëm dy, një ose asnjë, varësisht prej shenjës së a dhe çiftësisë së n .

Vërejmë se modulet e të gjithë n vlerave të w_k te formula (1) janë të barabarta $\sqrt[n]{r}$, por argumentet $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi+2\pi}{n}, \frac{\varphi+4\pi}{n}, \dots$ ndryshojnë njëri prej tjetrit për $\frac{2\pi}{n}$. Kjo do të thotë se pikat që u përgjigjen të gjithë n rrënjëve prej numrit kompleks z shtrihen te vija rrethore me qendër në fillimin koordinativ dhe rreze $\rho = \sqrt[n]{r}$, kurse vijën rrethore e ndan në n harqe të puthitshme (figura 1).

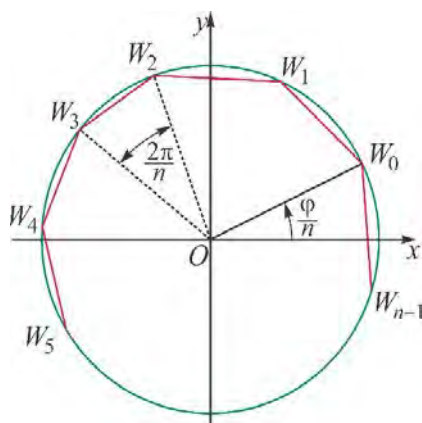


Figura 1

Prandaj, të gjitha n vlerat e rrënjës n prej numrit kompleks $z \neq 0$ (real ose imagjinar) te rrafshi kompleks paraqesin kulme të një n këndëshi që është brendashkruar te vija rrethore me rreze $\sqrt[n]{r}$ dhe qendra në fillim të O .

Shembulli 1. Ta caktojmë bashkësinë e numrave kompleks $\sqrt[3]{i}$.

Pasi $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ vlera e $\sqrt[3]{i}$ i fitojmë nga formula

$$w_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \text{ për } k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \\ &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

$$\text{Prandaj, kemi se } \sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}.$$

Shembulli 2. Ta caktojmë bashkësinë e numrave kompleks $\sqrt[3]{-8}$. Për shkak të $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, bashkësia $\sqrt[3]{-8}$ i fitojmë prej barazimi:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) \right) =$$

$$= 2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3},$$

$$\text{Prandaj, kemi se } \sqrt[3]{-8} = \{1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}\}.$$

Shembulli 3. T'i caktojmë të gjithë numrat e bashkësisë $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$.

Për shkak $-2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$, ku $r = \sqrt{4 + 12} = 4$ dhe $\varphi = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\pi}{3}$, numrat e kërkuar janë:

$$w_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \pi) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_3 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

Detyra

1. Njehso: a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt[3]{-i}$; c) $\sqrt[3]{2i}$.

2. Njehso: a) $i^{\frac{3}{4}}$; b) $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$; c) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{4}{5}}$.

3. Njehso: a) $\sqrt[6]{(-6 + i6\sqrt{3})}$; b) $\sqrt{2i}$; c) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

4. Njehso: a) $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$.

5.6. Zbatimi i numrave kompleks

Këtu do të shqyrtojmë disa pasoja të formave të ndryshme të shkruarit dhe interpretimit gjeometrik të numrit të dhënë kompleks. Ato pasoja shfrytëzohen në shumë fusha të ndryshme të matematikës dhe me ndihmën e tyre thjeshtë shqyrtohen lidhjet e caktuara, caktohet shënimet ekuivalente, si edhe zgjidhjet e llojeve të barazimeve të caktuara.

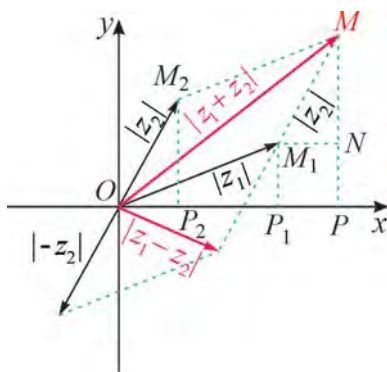


Figura 1

Prej trekëndëshit OM_1M , brinjët e të cilit janë këto pabarazime të rëndësishme: $|z_1|$, $|z_2|$ dhe $|z_1 + z_2|$ (figura 1) vijnë

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

domethënë moduli i shumës prej dy numrave kompleks është më i vogël ose i barabartë me shumën e moduleve të mbledhësve, kurse është më i madhe ose i barabartë me ndryshimin e atyre moduleve. Këto pabarazime janë në pajtim të plotë me teoremën e njohur në gjeometrinë elementare për raportin ndërmjet brinjëve të trekëndëshit. Prej ku $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ dhe $|-z_2| = |z_2|$ vijnë edhe pabarazimet:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

domethënë, për modulin e ndryshimit të dy numrave kompleks vlejnjë të njëjtat pabarazimet e atilla si edhe për modulin e shumës. Kjo është e kuptueshme kur kemi parasysh se $|z_1 - z_2|$ – gjatësia e diagonales tjetër të paralelogramit OM_1MM_2 është, gjithashtu, brinja e trekëndëshit, ku dy brinjët e tjera janë $|z_1|$ dhe $|z_2|$ (figura 1).

Shenja për barazim do të vlen vetëm në rastin e veçantë kur pikat O , M_1 , M_2 shtrihen në një drejtëz.

Shembulli 1. Ta caktojmë bashkësinë e pikave z në rrafshin kompleks që i kënaq kushtet;

a) $|z - a| = r$, $r > 0$ ku a është pikë fikse prej rrafshit të njëjtë, kurse r është numër real pozitiv,

b) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$, ku a dhe b janë pika fikse prej rrafshit të njëjtë.

Le të jenë z_1 dhe z_2 dy pika të rrafshit kompleks. Atëherë $|z_1 - z_2|$ ose $|z_2 - z_1|$ është gjatësia e diagonales M_1M_2 të paralelogramit OM_1MM_2 (figura 1) që i lidh pikat z_1 dhe z_2 , përkatësisht, largësia ndërmjet atyre dy pikave.

Prandaj, $|z - a|$ është largësia e pikës së ndryshores z prej një pike fikse a të rrafshit kompleks. Prej këtui vijon se bashkësia e pikave që e kënaq kushtin:

a) $|z - a| = r, r > 0$ është vija rrethore me qendër në pikën a dhe rreze r ;

b) $|z - a| = |z - b|, a \neq b$ është simetralja e segmentit pikat e skajshme të të cilit janë pikat fikse a dhe b .

Të ndalemi tani te interpretimi gjeometrik i shumëzimit dhe pjesëtimit të numrave kompleks.

Pika që i korrespondon prodhimit $z_1 \cdot z_2$ të numrave kompleks $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ dhe $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ do ta fitojmë nëse rreze vektori i parë që i përgjigjet z_1 e rrotullojmë rreth fillimit O në kahen pozitive për këndin $\varphi_2 = \text{Arg } z_2$, kurse pastaj moduln e atij vektori $|z_1| = r_1$ e zmadhojmë për $r_2 = |z_2|$ herë (për $0 \leq r_2 < 1$ Ky është zvogëlim) (figura 2).

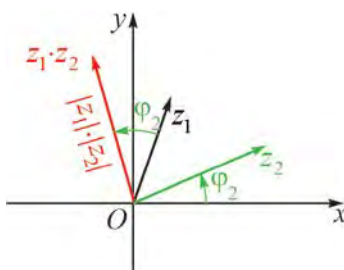


Figura 2

Çdo herës $\frac{w}{z}$ mund ta shkruajmë si prodhim $\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot z^{-1}$, prandaj është e mjaftueshme të tregojmë se si prej pikës z e fitojmë pikën $\frac{1}{z} = z^{-1}$.

Pikën z^{-1} do ta fitojmë nëse prej asaj pike z së pari kalojmë te pika z' e cila shtrihet në largësi r^{-1} prej fillimit O të gjysmëdrejtëzës së njëjtë, te e cila shtrihet edhe pika z (figura 3), kurse pastaj kalojmë kah pika që me z' është simetrike në lidhje me boshtin real (figura 3). Ajo është pika e kërkuar z^{-1} . Është e qartë se pika z' do të puthitet me z nëse vetëm nëse $|z| = 1$. Pastaj, nëse z shtrihet në brendësinë e rrethit njësi, atëherë z' do të shtrihet jashtë tij, dhe anasjelltas.

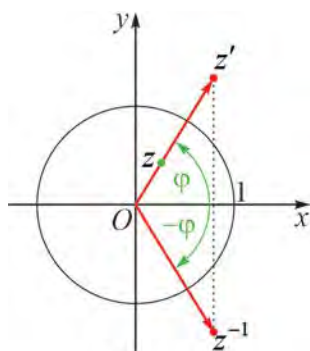


Figura 3

Me interes të veçantë edhe rëndësia është rrënja n prej numrit 1. Bashkësia e rrënjëve ka n numra të ndryshëm kompleks të quajtur **rrënjë primitive** të numrit 1.

Prej kësaj që $1 = \cos 0 + i \sin 0$ rrënjët primitive të numrit 1 janë dhënë me formulën:

$$E_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Vlerat reale të $\sqrt[n]{1}$ fitohen për:

- $k = 0$ dhe $k = \frac{n}{2}$ nëse n është numër çift;
- $k = 0$, nëse n është numër tek.

Pikat që u korrespondojnë të gjithë numrave prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$ që shtrihen në vijën rrethore në fillimin O dhe rreze $r = 1$. Ato vijën rrethore e ndajnë në n harqe të barabarta, kurse njëra prej tyre që i përgjigjet numrit 1 është boshti Ox , prej këtu vijon se pikat që u përgjigjen numrave imagjinar prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$ janë simetrike në lidhje me boshtin real. Domethënë numrat prej bashkësisë $\sqrt[n]{-1}$, që nuk janë reale, janë sipas çifteve të konjuguara komplekse.

Shembulli 2. a) Rrënja katrore prej njëshit ka dy vlera: 1 dhe -1.

b) Rrënja e katërt prej njëshit ka katër vlera: 1, i , -1 , $-i$ domethënë bashkësia prej të gjithë 4 rrënjëve të njëshit është $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

c) Rrënja kubike prej njëshit gjendet sipas formulës

$$E_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

Përveç $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, bashkësia $\sqrt[3]{1}$ i përmban edhe numrat:

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{dhe} \quad \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Shembulli 2. Ta caktojmë bashkësinë $\sqrt[6]{1}$.

$$E_6 = \left\{ 1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Vërejmë se çdo rrënjë kubike prej njëshit është edhe rrënja e 6 prej njëshit, kurse jo çdo rrënjë e 4 prej njëshit është edhe rrënja e 6 e njëshit.

Shembulli 3. Ta caktojmë numrin kompleks $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2(-1-i)} \right)^{12}$.

Shprehja e dhënë e paraqet numrin kompleks $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{12}$ ku $z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

dhe $z_2 = -1 - i$. Për numrin kompleks z_1 kemi

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

prej ku vijon se $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Por, e dimë edhe $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ që tregon faktin se duhet të kemi kujdes gjatë caktimit të këndit φ_1 . Cilin kënd do ta marrim prej pozitës së pikës (x, y) të rrafshi koordinativ, e cila i përgjigjet numrit kompleks z_1 . Këtu e kemi pikën $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, kurse ajo është në kuadranti i parë, domethënë $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Vërejmë edhe se $\frac{4\pi}{3} \notin (-\pi, \pi]$. Për numrin kompleks z_2 kemi: $r_2 = \sqrt{1+1} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Poashtu pika $(-1, -1)$ është në kuadrantin e tretë, pra $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ dhe $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$. Domethënë kemi se ku

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} &= \frac{(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{12}}{(\sqrt{2})^{12} \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})^{12}} = \frac{\cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3}}{2^6 (\cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4})} = \\ &= \frac{\cos 4\pi + i \sin 4\pi}{64(\cos 15\pi + i \sin 15\pi)} = \frac{1 + i \cdot 0}{64(-1 + i \cdot 0)} = -\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Shembulli 4. Të vërtetojmë se ku $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{R}$.

Kemi se ku

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n &= \frac{\left(1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^n}{\left(1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^n} = \frac{\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{\cos^n \alpha}}{\frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n}{\cos^n \alpha}} = \\ &= \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)} = \frac{\frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha}}{\frac{\cos n\alpha - i \sin n\alpha}{\cos n\alpha}} = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}. \end{aligned}$$

Shembulli 5. Ta zgjidhim barazimin binomial: $x^5 + 32i = 0$.

Prej $x^5 + 32i = 0$ kemi $x = \sqrt[5]{-32i}$. Numrin $-i$ do të paraqitet në formën trigonometrike duke marrë se $x^5 = -32i = 32(-i)$.

Pasi që $-i = \cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ)$ kemi $x^5 = 32(\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ))$.

Atëherë

$$x = 2(\cos(-18^\circ + 72^\circ k) + i \sin(-18^\circ + 72^\circ k)), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Për $k = 0$, $z_0 = 2(\cos 18^\circ - i \sin 18^\circ) = 1,90 - i0,62$.

Për $k = 1$, $z_1 = 2(\cos 54^\circ + i \sin 54^\circ) = 1,18 - i1,62$.

Për $k = 2$, $z_2 = 2(\cos 126^\circ + i \sin 126^\circ) = -1,18 - i1,62$.

Për $k = 3$, $z_3 = 2(\cos 198^\circ + i \sin 198^\circ) = -1,18 - i1,62$.

Për $k = 4$, $z_4 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i$.

Shembulli 6. Gjeji shumat:

$A = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ dhe $B = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$, për $n \in \mathbb{N}$

Le të jetë $z = A + iB$. Atëherë $A = \operatorname{Re}(z)$ dhe $B = \operatorname{Im}(z)$. Prej

$$\begin{aligned} z = A + iB &= (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^n}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos nx + i \sin nx)}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos nx + i \sin nx)}{(1 - \cos x) - i \sin x} \cdot \frac{(1 - \cos x) + i \sin x}{(1 - \cos x) + i \sin x} = \\ &= \frac{[1 - (\cos nx + i \sin nx)][(1 - \cos x) + i \sin x]}{2(1 - \cos x)}. \end{aligned}$$

Pas realizimit të operacioneve të shënuara me zbatimin e formulave të adicionit fitojmë se

$$z = A + iB = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

prej ku vijon se

$$A = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{dhe} \quad B = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Detyra

1. Si janë renditur vektorët të cilët u përgjigjen numrave kompleks z_1 dhe z_2 , nëse

$$\text{a)} \quad |z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|; \quad \text{b)} \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

2. Vërteto se numrat $(a + bi)^n$ dhe $(a - bi)^n$, $n \in \mathbb{N}$ janë kompleks të konjuguar.

3. Vërteto se herësi i çfarëdo dy numrave prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$ është përsëri numër prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$.

4. Vërteto se vlera reciproke e çfarëdo numri prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$ është përsëri numër prej bashkësisë $\sqrt[n]{1}$.

5. Zgjidhe barazimin $\frac{z^3}{32} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$.

6. Shkruaj në formën algjebrike numrin kompleks

$$z = (1 + \cos \alpha - i \sin \alpha)^{10}.$$

7. Zgjidhe barazimin $z^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) - z^4 - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 0$.

8. Vërteto se:

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right);$ b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right).$

9. Zgjidhi barazimet binome:

a) $z^3 - 8 = 0;$ b) $z^6 + 64 = 0;$ c) $z^4 - 81 = 0.$

10. Gjeji shumat e fundshme:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx;$ b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Paraqiti me vektor numrat kompleks z_1 dhe z_2 , kurse pastaj cakto shumën e tyre, nëse:

a) $z_1 = 2 + 5i, z_2 = 3 + 2i;$ b) $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 5 - 2i;$
c) $z_1 = -3 + 4i, z_2 = -2 - 3i;$ d) $z_1 = -1 + 3i, z_2 = 3 - i.$

2. Cakto ndyshimin gjeometrik të z_1 dhe z_2 , nëse

a) $z_1 = 4 + 3i, z_2 = 1 - i;$ b) $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -5 + 2i;$
c) $z_1 = -2 - 4i, z_2 = -5 - 2i;$ d) $z_1 = 6 - 2i, z_2 = 2 + 3i.$

3. Cakto modulën e numrit kompleks:

a) $12 - 5i;$ b) $-\sqrt{3} + i;$ c) $1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)i;$
d) $\sin \varphi - i \cos \varphi;$ e) $-2i;$ dh) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi.$

4. Cakto largësinë ndërmjet pikave të rrafshi i numrave kompleks:

a); $1 - i$ dhe $-2 + 3i$ b) $5 - i$ dhe $-3 + 5i;$ c) 1 dhe $\cos \varphi - i \sin \varphi.$

5. Cakto pikat të rrafshi kompleks për të cilët vlejnë:

a) $|z - i| \leq 1;$ b) $|z - 1| = 1;$ c) $1 \leq |z| \leq 3;$ d) $|z - 1| = |z - 3|.$

6. Paraqiti në formën trigonometrike numrat kompleks:

a) $\sqrt{3} + 1;$ b) $-1 - i\sqrt{3};$ c) $-3i;$ d) $-3;$ e) $3 - 4i.$

7. Hijezoje bashkësinë e pikave të rrafshi i cili i korrespondon numrave kompleks me modul r argumentet e të cilët e plotësojnë kushtin:

a) $\varphi = \frac{\pi}{3},$ b) $0 < \varphi < \pi,$ c) $2 < r < 3,$ d) $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

8. Caktoi të gjitha vlerat për argumentin φ të numrit kompleks:

a) $-1 + i;$ b) $-1;$ c) $\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5};$
d) $1 - i\sqrt{3};$ e) $\operatorname{tg} \varphi + i;$ dh) $\operatorname{ctg} \alpha + i.$

9. Cakto prodhimin $z_1 \cdot z_2$, nëse:

a) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ dhe $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;

b) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$, dhe $z_2 = 3(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$;

c) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ dhe $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

10. Cakto modulin dhe argumentin e numrit z'' , nëse $z = 1 + \cos i\alpha + \sin \alpha$.

11. Si do të ndryshoj moduli dhe argumenti i numrit kompleks $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, nëse shumëzohet me:

a) i ; **b)** $-i$; **c)** 4 ; **ç)** $-2i$; **d)** $1+i$; **dh)** $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

12. Cakto $z_1 : z_2$, nëse:

a) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ dhe $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$;

b) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ dhe $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)$;

c) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ dhe $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$;

ç) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ dhe $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$.

13. Kryeje fuqizimin:

a) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$; **b)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3$; **c)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$; **ç)** $(-1+i)^{-5}$.

14. Njehso:

a) $\frac{(i-1)^7}{(1+i)^5}$; **b)** $\frac{(1+i)^8 - (1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^6}$; **c)** $\frac{(1-i)^{-8}}{(1+i\sqrt{3})^6}$; **ç)** $(\sqrt{3}+i)^{10} + (\sqrt{3}-i)^{10}$.

15. Kontrolloni barazimet:

a) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$; **b)** $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

16. Cakto rrënjët e barazimeve:

a) $x^2 + 16 = 0$; **b)** $x^2 + 20 = 0$.

17. Zgjidhe barazimet katrore:

a) $x^2 - 4x + 20 = 0$; **b)** $x^2 + 3x + 8 = 0$; **c)** $2x^2 - 7x + 10 = 0$;

ç) $z^2 + z + 1 = 0$; **d)** $x^2 - (1+i)x + i = 0$.

18. Formo barazime katrore me koeficient real rrënjët e të cilëve janë:

a) $x_1 = 2+i$, $x_2 = 2-i$; **b)** $x_1 = i\sqrt{5}$, $x_2 = -i\sqrt{5}$.

19. Formo barazim katror me koeficient real, nëse njëra rrënjë është:

a) $2+3i$; **b)** $12-13i$; **c)** $1+\cos \alpha + i \sin \alpha$.

20. Zgjidhe barazimet:

a) $z^2 + 27 = 0$; **b)** $z^5 - 1 = 0$; **c)** $z^7 + 1 = 0$;

ç) $36z^4 - 25 = 0$; **d)** $z^6 + 64 = 0$; **dh)** $z^3 - 2i = 0$.

e) $z^5 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, **f)** $z^8 - \sqrt{3} + i = 0$, **g)** $z^7 + 1 - i = 0$.

6. ZGJIDHJA E ÇFARËDO TREKËNDËSHI

Gjatë zgjidhjes së trekëndëshit kënddrejtë, lidhja ndërmjet brinjëve dhe këndeve është dhënë në bazë të përkufizimit të çdo funksioni trigonometrik të këndit të ngushtë të trekëndëshi kënddrejtë. Ato lidhje nuk mund t'i shfrytëzojmë për trekëndëshin e pjerrët, pasi te ai nuk ka kënd të drejtë.

Njehsimi i elementeve të panjohura të trekëndëshit, kur janë dhënë vlerat numerike të atyre tre elementeve themelore të cilat janë të nevojshme për konstruktimin e trekëndëshit, quhet **zgjidhja e trekëndëshit**.

Megjithatë, që të mund ta zgjidhim edhe trekëndëshin e pjerrët, duhet të gjejmë lidhje përkatëse ndërmjet brinjëve dhe këndeve të trekëndëshi i atillë. Për këtë shkak, do t'i vërtetojmë teoremën e sinusit dhe kosinusit, në bazë të cilave vendoset lidhje ndërmjet brinjëve dhe këndeve të çfarëdo trekëndësh.

6.1. Teorema e sinusit

Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC (figura 1) rreth të cilit është jashtashkruar vija rrethore me diametër $2R = \overline{CD}$. Nëse pikën D e lidhim me pikat B dhe A , fitojmë trekëndësh kënddrejtë BCD dhe ACD .

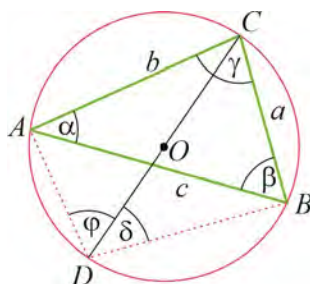


Figura 1

Sipas përkufizimit të funksioneve trigonometrike të trekëndëshi kënddrejtë, prej trekëndëshit kënddrejtë BCD kemi se

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \sin \delta \text{ ose } \frac{a}{2R} = \sin \alpha,$$

ku $\delta = \alpha$, si kënde periferike mbi harkun e njëjtë BC .

Barazimin $\frac{a}{2R} = \sin \alpha$ mund ta shkruajmë në formën

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

Prej trekëndëshit kënddrejtë ACD kemi

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \sin \varphi \text{ ose } \frac{b}{2R} = \sin \beta$$

ku $\varphi = \beta$ si kënde të hijezuara mbi harkun e njëjtë AC .

Barazimi $\frac{b}{2R} = \sin \beta$ mund ta shkruajmë në formën

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R.$$

Në mënyrë të ngjashme, duke tërhequr diametrin prej kulmit A , kemi

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Prandaj, kemi se

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

që do të thotë se përpjesa e çdo brinje dhe sinusit prej këndit të përballtë të asaj brinje të trekëndëshi është numër konstant dhe është i barabartë me diametrin e vijës rrethore të jashtashkruar të trekëndëshi.

Proporcionin e vazhduar mund ta shkruajmë në këtë formë:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Teorema e sinusit: Brinjët e çfarëdo trekëndësh janë proporcionale me sinusat prej këndeve të përballta.

Teoremën e sinusit e vërtetojmë në rastin kur trekëndëshi ABC është këndngushtë. Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetojmë se teorema është e saktë edhe në rastin kur trekëndëshi ABC është këndgjerë (figura 2). Prandaj, teorema e sinusit është e saktë për çfarëdo trekëndësh

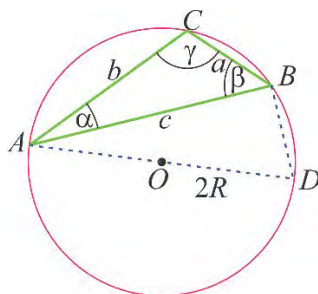


Figura 2

Shembulli 1. Ta caktojmë raportin e brinjëve $a : b$, $a : c$ dhe $b : c$ të trekëndëshit ABC , nëse:

a) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;

b) $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

a) Në bazë të teoremës së sinusit, kemi se

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{dhe}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{6}$$

$$\text{dhe } \frac{b}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Teorema e sinusit shfrytëzohet gjatë zgjidhjes së trekëndëshit, dhe atë në këto raste:

- I. Kur është dhënë një brinjë dhe dy kënde që shtrihen në atë brinjë,
- II. Kur janë dhënë dy brinjë dhe këndi përballë njëres prej brinjëve të dhëna

Rasti I: Zgjidhe trekëndëshin nëse janë dhënë brinja a dhe këndet β dhe γ të cilat shtrihen te brinja a .

Këndi i tretë të trekëndëshi është $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Për brinjët b dhe c prej teoremës së sinusit kemi se

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{dhe} \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Shembulli 2. Cakto këndin α dhe brinjët b dhe c , nëse $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 68^\circ$ dhe brinja $a = 160\text{cm}$.

Prej $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ kemi se $\alpha = 76^\circ$. Gjatësinë e brinjës b e njehsojmë prej barazimit:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{160 \cdot \sin 36^\circ}{\sin 76^\circ} = 96,925\text{cm},$$

kurse brinjën c e njehsojmë prej barazimit:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{160 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 76^\circ} = 152,8896\text{cm}.$$

Rasti II: Zgjidhe trekëndëshin me brinjët b dhe c dhe këndin β .

Së pari e gjejmë këndin γ prej barazimit:

$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta$$

por pastaj këndin α prej barazimit $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$. Brinjën a e gjejmë prej barazimit:

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Gjatë zgjidhjes së detyrave prej këtij lloji të mundshme janë këto raste:

a) Nëse $b > c$, atëherë $\beta > \gamma$ (pasi $\beta + \gamma < \pi$), prej ku përfundojmë se

këndi γ është i ngushtë. Atëherë $\frac{c}{b} < 1$. Për shkak të $\sin \beta \leq 1$, kemi se edhe $\sin \gamma < 1$, pra detyra ka një zgjidhje për γ , α dhe a .

b) Nëse $b < c$, pra $\frac{c}{b} > 1$, atëherë $\beta < \gamma$, pra këndi γ mund të jetë i ngushtë, i drejtë ose i gjerë. Në këtë rast mund të kemi se

- ✓ nëse $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta > 1$, atëherë edhe $\sin \gamma > 1$. Pabarazia e fundit është e pamundshme, prandaj, detyra nuk ka zgjidhje;
- ✓ nëse $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta = 1$, atëherë edhe $\sin \gamma = 1$, prej ku vijon se $\gamma = 90^\circ$. Në këtë rast trekëndëshi është kënddrejtë;
- ✓ nëse $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta < 1$ edhe, atëherë edhe $\sin \gamma < 1$, pra këndi γ është i ngushtë, i drejtë ose i gjerë. Detyra ka dy zgjidhje për γ , prandaj edhe pas dy zgjidhjeve për α dhe a .

Shembulli 3. Zgjidhe trekëndëshin me brinjë $a = 2$, $c = 1$ dhe këndi $\gamma = 50^\circ$.

Prej barazimit $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ kemi $\sin \alpha = 2 \sin 50^\circ \approx 1,53$. Pasi nuk ekziston kënd α për të cilin $\sin \alpha > 1$, vijon se kënd i atillë nuk ekziston.

Shembulli 4. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 50\text{cm}$, $b = 32\text{cm}$ dhe $\alpha = 73^\circ$.

Pasi $a > b$, detyra ka një zgjidhje për këndin β , γ dhe c . Këndin β e fitojmë prej:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{32}{50} \cdot \sin 73^\circ$$

pra edhe për γ dhe c , prej ku kemi $\beta \approx 37^\circ 49'$, $\gamma = 69^\circ 11'$ dhe $c \approx 48,87\text{ cm}$.

Shembulli 5. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $b = 14\text{cm}$, $c = 26\text{cm}$, $\beta = 32^\circ$.

Këndin γ e njehsojmë prej barazimit $\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta = \frac{26}{14} \sin 32^\circ$.

Pasi janë dhënë dy brinjë dhe këndi përballë brinjës më të vogël dhe $\sin \gamma < 1$, fitojmë dy zgjidhje:

$$\gamma_1 \approx 79^\circ 52', \quad \gamma_2 \approx 100^\circ 8', \quad \alpha_1 \approx 68^\circ 8', \quad \alpha_2 \approx 47^\circ 52', \quad a_1 \approx 24,53\text{cm}, \quad a_2 \approx 19,59\text{cm}.$$

Detyra

1. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 31$, $\alpha = 54^\circ 15'$, $\beta = 76^\circ 20'$.

2. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $c = 10$, $\alpha = 62^\circ 22'$, $\beta = 28^\circ 52'$.

3. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 12$, $c = 15$, $\gamma = 20^\circ 20'$.

4. Këndet në një trekëndësh qëndrojnë si 3 : 4 : 8. Sa është raporti i brinjës më të gjatë dhe më të shkurtër të trekëndëshit?

5. Te trekëndëshi $\triangle ABC$ është tërhequr vija e rëndimit AK . Gjatësia e saj është $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ dhe ajo me brinjën AC formon kënd prej 30° . Cakto gjatësinë e brinjës BC nëse $\angle ACB = 45^\circ$.

6. Te $\triangle ABC$ është dhënë $\overline{AB} = 24\text{cm}$, $\overline{AC} = 9\text{cm}$ dhe $\alpha = 60^\circ$. Cakto gjatësinë e brinjës BC dhe jashtashkruar.

6.2. Teorema e kosinusit

Le të jetë dhënë trekëndëshi këndngushtë ABC (figura 1 a). Me ndihmën e teoremës së Pitagorës do ta shprehim lartësinë h_c pastaj prej trekëndëshit BCD së pari prej trekëndëshit ADC , por

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad \text{dhe} \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$$

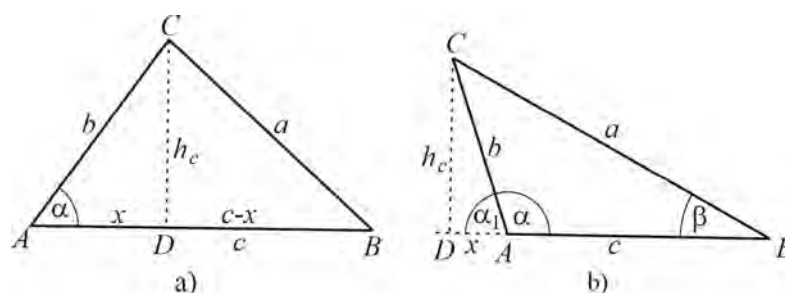


Figura 1

Prej barazisë së të anëve të majta të dy barazimeve vijon se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \quad (1)$$

Prej trekëndëshit ADC kemi se $x = b \cos \alpha$. Me zëvendësim te (1), kemi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Barazimi është i saktë edhe kur këndi α është i gjerë (figura 1 b). Në atë rast kemi

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + (c+x)^2 = (b \sin \alpha_1)^2 + (c+b \cos \alpha_1)^2 = \\ &= b^2 \sin^2 \alpha_1 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1 = \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha_1) = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme, nëse i shprehim lartësitë h_a dhe h_b , do të kemi se

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Teorema e kosinusit. Le të jenë a , b dhe c brinjë dhe α , β dhe γ këndet përkatëse të përballta të brendshme $\triangle ABC$. Atëherë vlejné barazimet:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Të vërejmë se te rasti ku $\alpha = \frac{\pi}{2}$, barazimi është në realitet teorema e Pitagorës.

Me ndihmën e teoremës së kosinusit zgjidhim trekëndësh, nëse janë dhënë:

Rasti I: Dy brinjë dhe këndi ndërmjet tyre.

Shembulli 1. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$, $\gamma = 60^\circ$.

Së pari e njehsojmë brinjën c

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma} = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cos 60^\circ} = \\ = \sqrt{4 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Për këndin α pej barazimit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ kemi se

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

prej ku vijon se $\alpha = 90^\circ$. Prej këtu kemi se

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 30^\circ.$$

Rasti II: Të tri brinjët e trekëndëshit.

Shembulli 2. Zgjidhe trekëndëshin nëse $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ dhe $c = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Prej teoremës së kosinuset vijon se:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1 + 3 - 4}{2\sqrt{3}} = 0,$$

prej ku fitohet $\beta = 90^\circ$. Në mënyrë të ngjashme

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 3 - 1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

prej ku vijon se $\alpha = 30^\circ$. Përfundimisht $\gamma = 60^\circ$.

Detyra

1. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $b = 18$, $c = 13$, $\alpha = 44^\circ 30'$.
2. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 738$, $b = 739$, $\gamma = 60^\circ 15'$.
3. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 15$, $b = 12$, $c = 18$.
4. Për brinjët e $\triangle ABC$ vlen $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 5$. Cakto madhësinë e këndit më të madh të trekëndëshi?
5. Cakto madhësinë e këndit α , nëse për gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshit vlen $\frac{(b+c)^2 - a^2}{bc} = 1$.
6. Cakto brinjët e trekëndëshit me syprinë $3\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$ të brinjëve që e formojnë atë kënd $b + c = 7$.

6.3. Teorema e tangensit. Formulatat e Ojlerit

Prej teoremës së sinusit kemi $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ dhe $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, pra $a = 2R \sin \alpha$ dhe

$$b = 2R \sin \beta. \text{ Atëherë } \frac{a+b}{a-b} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{2R(\sin \alpha + \sin \beta)}{2R(\sin \alpha - \sin \beta)}$$

Nëse i zbatojmë formulat për transformimin e shumës dhe ndryshimit në prodhim domethënë $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ fitohet:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

në këtë mënyrë e vërtetuar këtë teoremë.

Teorema e tangensit. Le të jenë a, b brinjët e $\triangle ABC$ dhe α, β janë kënde

të kundërta. Atëherë
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Vërejtje. Prej asaj $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ dhe $\operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg} \gamma$ atëherë teorema

e tangensit është
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Shembulli 1. Zgjidhe trekëndëshin nëse $a + b = 13$, $\alpha = 81^\circ$, $\beta = 38^\circ$.

Së pari ta caktojmë këndin $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 61^\circ$.

Prej teoremës së tangensit kemi
$$\frac{13}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{119^\circ}{2}}{\operatorname{tg} \frac{43^\circ}{2}} \text{ d.m.th. } a-b=3. \text{ Me zgjidhjen}$$

e sistemit $\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=3 \end{cases}$ fitohet $a=8$, $b=5$, kurse me zbatimin e teoremës së sinusit kemi se $c=7$.

Shembulli 2. Njehso këndet te trekëndëshi, nëse $a:b=5:3$ dhe $\alpha + \beta = 155^\circ$.

Këndi $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 25^\circ$. Nëse prej $\frac{a}{b}$ shtojmë 1, përkatësisht zbresim

1, fitohet $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b} = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$ dhe $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} = \frac{2}{3}$ domethënë

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{2} = 4. \text{ Domethënë prej teoremës së tangensit } \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} = 4 \text{ d.m.th.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \approx 1,12768, \text{ pra } \frac{\alpha - \beta}{2} = 48,5^\circ. \text{ Me zgjidhjen e sistemit } \begin{cases} \alpha + \beta = 155^\circ \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 48,5^\circ \end{cases}$$

fitohet se $\alpha = 126^\circ, \beta = 29^\circ$.

Dihet se $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Kemi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)} = \\ &= \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)(b + c - a)} = \frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)} \end{aligned}$$

ku $s = \frac{a + b + c}{2}$. Në këtë mënyrë e fitojmë formulën $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$.

Prandaj, **formulat e Ojlerit** janë:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}} \text{ dhe } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}.$$

Shembulli 3. Vërteto se $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s - a}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s - b}$ dhe $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s - c}$, ku r është rrezja e vijës rrethore të brendashkruar.

Dihet se $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$, pra

kemi $r = \sqrt{\frac{(s - a)^2 (s - b)(s - c)}{s(s - a)}} = (s - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Domethënë $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s - a}$.

Ngjashëm fitohen dy barazimet e tjera.

Shembulli 4. Zgjidhe trekëndëshin ABC nëse $r = \sqrt{3}$, $s - c = 3$ dhe $\alpha = 31^\circ$.

Prej formulës $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s - c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vijon se $\frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ domethënë $\gamma = 60^\circ$. Prandaj

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 89^\circ$ dhe $s - a = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, pra $s - a \approx 6$. Vlera e brinjës

$b = s - c + s - a = 9$, kurse $a = \frac{9 \sin 31^\circ}{\sin 89^\circ} \approx 4,5$ dhe $c = 7,79$.

Detyra

1. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a + c = 28$, $\beta = 60^\circ$ dhe $\gamma = 68^\circ$.
2. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a - b = 8$, $\alpha = 40^\circ$ dhe $\beta = 30^\circ$.
3. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 5$, $b = 3$ dhe $\gamma = 96^\circ$.
4. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 52$, $b = 39$ dhe $c = 37$.
5. Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 19$, $b = 17$ dhe $c = 23$.
6. Zgjidhe trekëndëshin ABC nëse $r = 5\sqrt{3}$, $s - a = 5$ dhe $\gamma = 60^\circ$.

6.4. Zbatimi i teoremave në planimetri

Shumica e formulave në planimetri mund të vërtetohen me ndihmën e trigonometrisë. Në veçanti me zbatimin e teoremës së sinusit dhe kosinusit.

Shembulli 1. Le të jenë a, b, c brinjët dhe α, β, γ këndet përkatëse të trekëndëshi ABC (figura 1). Me gjysmëperimetri $s = \frac{L}{2} = \frac{a+b+c}{2}$, syprina S dhe rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar R . Vërteto se

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}, \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dhe} \quad R = \frac{abc}{4P}.$$

Syprina e trekëndëshit ABC është e barabartë me $S = \frac{ch_c}{2}$, kurse të trekëndëshi

kënddrejtë C_1BC vlen $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$, pra $h_c = a \sin \beta$, prej ku kemi se

$$S = \frac{ac \sin \beta}{2}.$$

Ngjashëm fitohet se $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ dhe $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$.

Prej teoremës së kosinusit vijon se $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ dhe prej

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2ac}.$$

Me zëvendësim të formula syprinën

kemi

$$\begin{aligned} S &= \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{ac}{2} \frac{\sqrt{(2ac - (a^2 + c^2 - b^2))(2ac + (a^2 + c^2 - b^2))}}{2ac} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(b-(a-c))(b+(a-c))(a+c-b)(a+c+b)} \end{aligned}$$

Tani zëvendësimet $a+b=2s-c$, $a+c=2s-b$ dhe $b+c=2s-a$ fitohet

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2^4 s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Le të jetë O qendra e vijës rrethore të jashtashkruar për ABC (figura 1). Atëherë $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$, si kënd qendror dhe periferik mbi harkun e njëjtë. Me zbatimin e teoremës së kosinusit $\triangle BOC$ fitohet

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 2\alpha = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) = \\ &= 2R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Domethënë $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin \alpha}$. Prej ku $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ vijon se $\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$, pra kemi

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

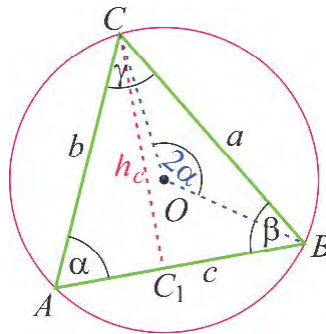


Figura 1

Vërejtje. Nëse te formula për syprinën e trekëndëshit $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, i shprehim brinjët a dhe b prej teoremës së sinusit, atëherë kemi

$$S = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Shembulli 2. Gjatësitë e diagonaleve të një paralelogrami (figura 2) janë 6cm dhe 10cm , kurse gjatësia e një brinje të tij është 7cm . Cakto këndin e ngushtë ndërmjet diagonaleve të paralelogramit.

Le të jenë $\overline{AC} = 10\text{cm}$, $\overline{BD} = 6\text{cm}$ dhe prerja e diagonaleve është pika S (figura 2). Me zbatimin e teoremës së kosinusit për $\triangle ASD$ fitohet se

$\cos \varphi = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$. Prej këtu fitohet $\varphi = 120^\circ$. Domethënë këndi i ngushtë është $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

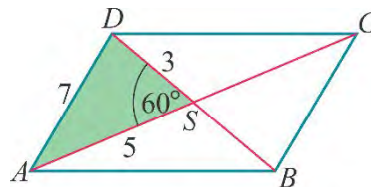


Figura 2

Shembulli 3. Gjatësitë e bazave të trapezit $ABCD$ (figura 3) janë 14cm dhe 3cm , kurse gjatësitë e krahëve janë 8cm dhe 7cm . Sa është syprina e trapezit?

Nëpër pikën D tërheqim drejtëz DE e cila është paralele me BC . Atëherë $\triangle AED$ ka brinjë $\overline{AE} = a - b = 11\text{cm}$, $\overline{AD} = 7\text{cm}$, $\overline{DE} = 8\text{cm}$. Me zbatimin e teoremës së

kosinusit fitohet $\cos \alpha = \frac{121 + 49 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{106}{154}$. Lartësinë h e trapezit

do ta caktojmë prej $\triangle AED$. Prej $\sin \alpha = \frac{h}{AD}$ kemi se $h = 7 \cdot \sin \alpha = 5,1\text{cm}$.

Syprina e trapezit është $S = \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{2} \cdot h = \frac{14 + 3}{2} \cdot 5,1 = 43,35\text{cm}^2$.

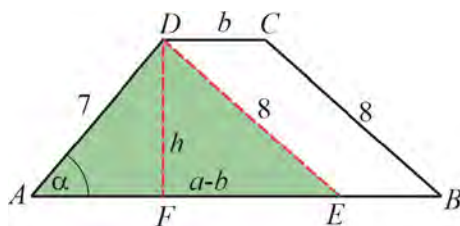


Figura 3

Detyra

1. Le të jenë P, Q, R pika të njëpasnjëshme te të cilat ndonjë drejtëz i pret, përkatësisht, brinjët BC, CA, AB (ose vazhdimet e tyre) të $\triangle ABC$. Atëherë $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$. (Teorema e Menelaut)
2. Prodhimi i diagonaleve të katërkëndëshit kordiak është i barabartë me shumën e gjysmëprodhimit të brinjëve të kundërta. (Teorema e Ptolomejt)
3. Perimetri i një trekëndëshi është 55cm , kurse dy kënde të tij janë $\alpha = 46^\circ 27'$ dhe $\beta = 63^\circ 15'$. Sa është syprina e atij trekëndëshi?
4. Gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi janë numra të njëpasnjëshëm, kurse këndi më i madh është dy herë më i madh se këndi më i vogël. Cakto perimetrin e trekëndëshit.

6.5. Zbatimi i teoremave në stereometri

Teorema e sinusit dhe kosinusit shfrytëzohen gjatë zgjidhjes së detyrave nga stereometria.

Shembulli 1. Baza e një piramide (figura 1) është trekëndësh barakrahas me krahun a dhe këndin pranë majës së trekëndëshit α . Të gjitha tehet anësore të piramidës formojnë kënd β me rrafshin e bazës. Cakto vëllimin e piramidës.

Nëse me S e shënojmë majën e piramidës, kurse me S' prerjen e normaleve të tërhequra prej majës së bazës, atëherë trekëndëshat ASS' , BSS' dhe CSS' janë të puthitshëm, pra. $\overline{AS'} = \overline{BS'} = \overline{CS'}$ prej ku përfundojmë se S' është qendra e vijës rrethore të bazës së piramidës (figura 1). Prej teoremës së sinusit

$$R = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Lartësia e piramidës } H = R \operatorname{tg} \beta, \text{ syprina e bazës } B = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$$

$$\text{dhe } V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot R \operatorname{tg} \beta}{6} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \beta}{6} = \frac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6}.$$

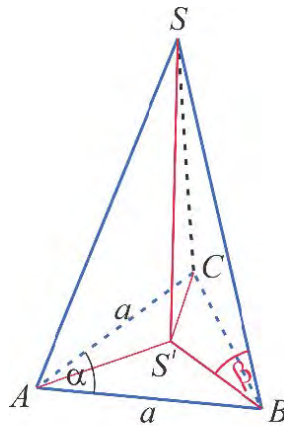


Figura 1

Shembulli 2. Baza e paralelopipedit të drejtë (figura 2) është paralelogram me brinjë a dhe b dhe këndin e ngushtë α . Diagonalja më e vogël e paralelogramit është e barabartë me diagonalen më të madhe të bazës. Cakto vëllimin e paralelopipedit.

Prej kushtit të detyrës $D_1 = d_2$. Baza e paralelopipedit është paralelogram syprina e të cilës është $S = ah = ab \sin \alpha$. Për lartësinë e paralelopipedit kemi

$$H^2 = D_1^2 - d_1^2, \text{ pra } d_2^2 = D_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha), \text{ por}$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \text{ (figura 2). Atëherë } H^2 = 4ab \cos \alpha \text{ domethënë } H = 2\sqrt{ab \cos \alpha}.$$

Syprina e bazës është $B = ab \sin \alpha$, kurse vëllimi është $V = 2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$.

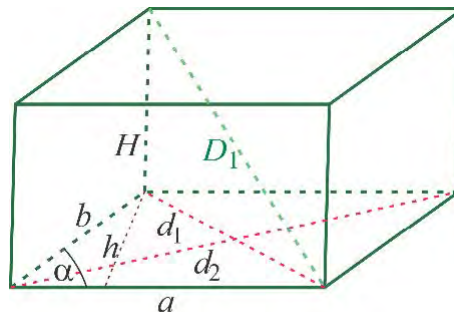


Figura 2

Shembulli 3. Është dhënë kubi (figura 3 a) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ me brinjë 1. Gjeje largësinë prej A deri te drejtëza $D_1 M$ ku M është mesi i tehut BB_1 .

Prej $\triangle ABM$ kemi se $\overline{AM} = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ngjashëm prej $\triangle ADD_1$ kemi $\overline{AD_1} = \sqrt{2}$ (figura 3 a).

Le të jetë M_1 mesi i brinjës DD_1 . Atëherë trekëndëshi $D_1 M_1 M$ është kënddrejtë, pra kemi $\overline{D_1 M} = \sqrt{D_1 M_1^2 + M_1 M^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2}$.

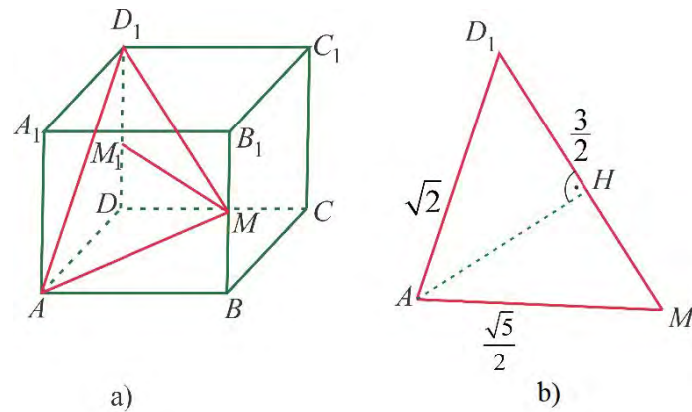


Figura 3

Ngel ta gjejmë lartësinë të trekëndëshi AMD_1 . Pasi

$\overline{D_1M}^2 < \overline{AM}^2 + \overline{AD_1}^2$ vijon se ai trekëndësh është këndngushtë. Kemi

$$\cos \angle D_1MA = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{D_1M}^2 - \overline{AD_1}^2}{2 \cdot \overline{D_1M} \cdot \overline{AM}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ prej ku vijon se } \sin \angle D_1MA = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Prandaj, } \overline{AH} = \overline{AM} \cdot \sin \angle D_1MA = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 1$$

Detyra

1. Baza e një piramide (figura 4) është trekëndësh barabrinjës me brinjë 5cm. Të gjitha tehet anësore të piramidës formojnë kënd 45° me rrafshin e bazës. Njehso vëllimin e piramidës.

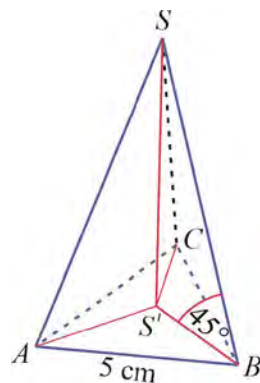


Figura 4

2. Le të jetë $EABCD$ piramidë me bazë paralelogram $ABCD$ me brinjë 1 dhe $\sqrt{3}$ dhe $\angle BAD = 60^\circ$. Rrëza e lartësisë është te prerja e diagonaleve të bazës dhe vlen $\overline{AE} = \sqrt{5 + 0,25 \cdot \sqrt{3}}$. Cakto vëllimin e piramidës.

3. Te koni është brendashkruar piramida $SABC$, me bazë ABC ashtu që $\angle ACB = 60^\circ$ dhe $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$. Lartësia e konit është 9. Cakto vëllimin e konit.

4. Trupi në figurën 5 është përfituar me largimin e qosheve prej kubit me tehl 24 cm.

a) Njehso gjatësitë e segmenteve PE dhe PR .

b) Njehso këndin PER .

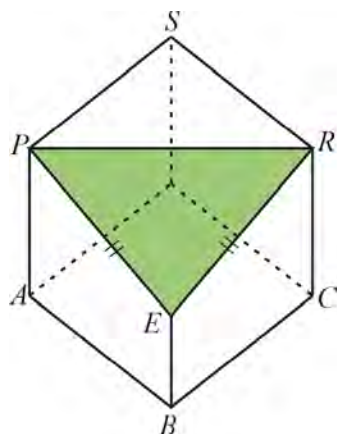


Figura 5

5. Për paralelopipedin te figura 6, X është mesi i segmentit EH dhe Y është mesi i segmentit CD .

- a) Njehso gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit AYX .
- b) Njehso këndin XAY .
- c) Njehso syprinën e trekëndëshit XAY .

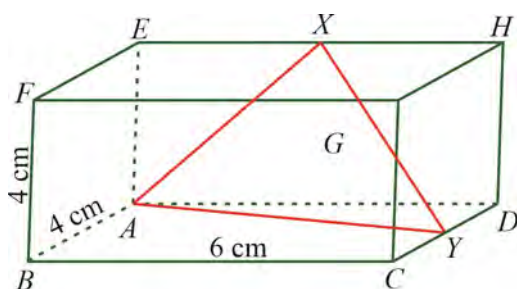


Figura 6

6.6. Zbatimi i teoremave në mekanikë dhe në jetën praktike

Teoremat prej trigonometrisë kanë zbatim të gjerë në mekanikë dhe në përgjithësi në jetën praktike. Do të përmendim disa shembuj.

Shembulli 1. Te pika A veprojnë dy forca $F_1 = 6N$ dhe $F_2 = 4N$ vektorët e të cilëve formojnë këndin e 60° . Cakto vektorin sipas të cilit pika A do të lëviz dhe madhësia e forcës e cila është rezultante. Cakto këndin që rezultanta forcë e formon me forcën F_1 .

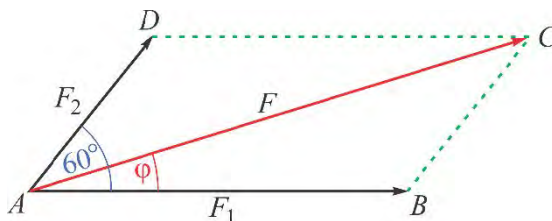


Figura 1

Pika A lëviz sipas resultantës forcë e cila është diagonalja e paralelogramit i konstruktuar mbi vektorët F_1 dhe F_2 (figura 1). Prej paralelogramit $ABCD$ me ndihmën e teoremës së kosinusit kemi .

$$|F|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{BC}|\cos 120^\circ \text{ d.m.th. } |F|^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76.$$

Prandaj $|F| = \sqrt{76} \approx 8,7N$. Këndi që rezultanta forcë e formon me forcën F_1 fitohet nëpërmjet teoremës së sinusit. Nëse $\angle BAC = \varphi$, atëherë kemi se

$$\sin \varphi = \frac{|\overline{BC}|\sin 120^\circ}{|\overline{AC}|} \approx 0,4, \text{ prej ku } \varphi \approx 23^\circ 30'.$$

Shembulli 2. Ta masim lartësinë e kodrës, vëzhguesi bën dy matje të majës të cilat janë në largësi prej 900 metra. Matja e parë është kur prej tokës e mat këndin sipas të cilit shikohet maja dhe fiton 47° , kurse për majën e dytë kemi 35° . Nëse supozojmë se pika matëse është në lartësi 2 metra prej tokës, cakto lartësinë e majës (figura 2a).

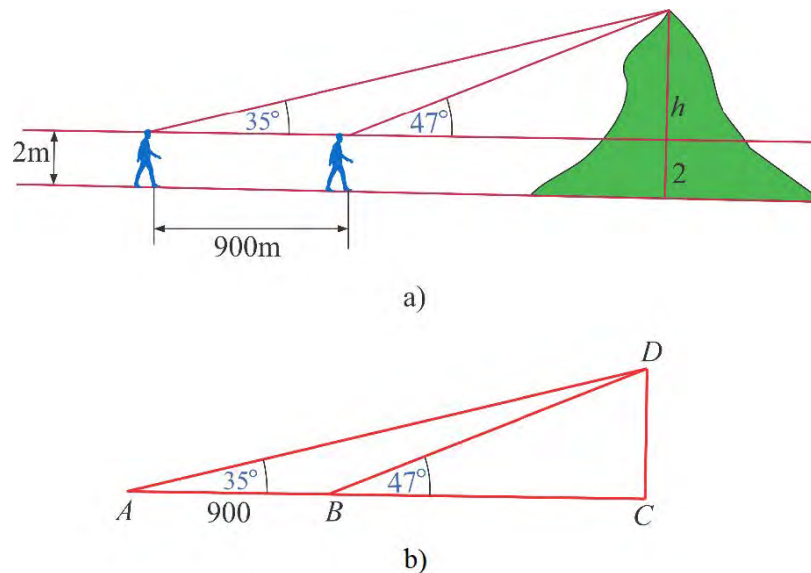


Figura 2

Atëherë prej $\angle ABD = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$ dhe $\angle BDA = 180^\circ - 133^\circ - 35^\circ = 12^\circ$ (figura 2 b). Prej teoremës së sinusit fitohet se $\overline{AD} = \frac{900 \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ} \approx 3165,86m$. Me

zbatimin e përkufizimit të teoremës së sinusit për këndin e ngushtë kemi se $\sin 35^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

domethënë $\overline{CD} = \overline{AD} \sin 35^\circ \approx 1816m$. Lartësia e kodrës është $1816 + 2 \approx 1818m$.

Shembulli 3. Sateliti artificial lëviz në lartësi h prej tokës sipas shtegut rrethor rreth asaj (figura 3). Ka kaluar mbi pikën A e cila gjendet në tokë dhe pas një kohe prej t sekonda, është vërejtur nën këndin α prej asaj pike në lidhje me sipërfaqen e tokës. Cakto kohën e nevojshme për një rrotullim të plotë të satelitit rreth tokës.

Nëse me C e shënojmë qendrën e tokës, kurse me S pozitën e satelitit për kohën t , atëherë prej $\triangle ASC$ fitohet $\sin \angle ASC = \frac{AC}{SC} \sin(90^\circ + \alpha)$. Pasi

$\overline{AC} = R, \overline{SC} = R + h$, atëherë $\sin \angle ASC = \frac{R \cos \alpha}{R + h}$. Koha e nevojshme për një

rrotullim të plotë rreth tokës fitohet prej formulës për shpejtësinë

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{2\pi t}{\gamma}, \text{ pra } T = \frac{2\pi t}{90^\circ - \alpha - \arcsin \frac{R \cos \alpha}{R + h}}.$$

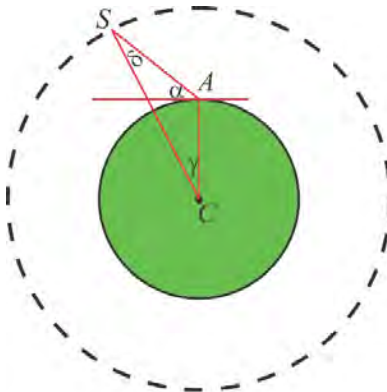


Figura 3

Detyra

1. Te pika A veprojnë dy forca $F_1 = 12N$ dhe $F_2 = 18N$ vektorët e të cilëve formojnë kënd prej 25° . Cakto madhësinë e rezultatës forcës.

2. Drita te ndriçuesit të anijes rrotullohet në kahen e shigjetave të orës me shpejtësi konstante prej një rrotullimi në minutë. Rrezja bie në pikën e bregut që është 366 metra prej anijes. Katër sekonda më vonë, drita bie në pikën 175 metra më larg prej bregut. Sa është larg bregu prej anijes?

3. Grupi i alpinistëve duke u shoqëruar prej perëndimit në largësi prej 1250 metra prej rrëzës së malit, kanë matur se këndi deri te maja e malit është 35° . Duke arritur te rrëza e malit, alpinistët kanë matur se këndi deri te maja është 48° . Sa metra është lartësia e malit?

4. Dy aeroplan ngrihen nga aeroporti në të njëjtën kohë dhe fluturojnë dy orë. Aeroplani A fluturon në drejtimin prej 165° me 385 km/h dhe aeroplani B fluturon në drejtimin prej 250° me 410 km/h. Në çfarë largësie njëri prej tjetrit do të jenë pas dy orë?

5. Në një anë prej lumit janë shënuar dy pika A dhe B, të cilët janë në largësi 120 m. Cakto largësinë ndërmjet pikave C dhe D të anës së kundërt të lumit, nëse $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle BAD = 40^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ dhe $\angle CBD = 41^\circ$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Te $\triangle ABC$, $\overline{BC} = 2\sqrt{6}$, $\angle ABC = 30^\circ$ dhe $\angle BCA = 45^\circ$. Cakto gjatësinë e simetrales së $\angle ABC$.

2. Te $\triangle ABC$ për gjatësitë e brinjëve vlen $a - b = 5\text{cm}$, $c = 7\text{cm}$ dhe $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{cm}$. Cakto gjatësinë e brinjës a .

3. Gjatësia e vijës së rëndimit të tërhequr prej kulmit A te $\triangle ABC$ është $t_a = 15\text{cm}$. Cakto gjatësinë e brinjës b , nëse $a = 16\text{cm}$, $c = 11\text{cm}$.

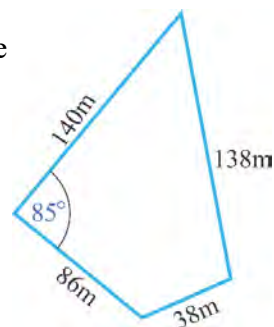
4. Gjatësitë e brinjëve të një paralelogrami janë 11cm dhe 6cm , kurse një kënd i paralelogramit është i barabartë me 112° . Sa është gjatësia e diagonales më të shkurtër të paralelogramit?

5. Cakto gjatësinë e simetrales së këndit të bazës te trekëndëshi barakrahas me gjatësi të krahut 15cm dhe këndin përballë bazës prej 30° .

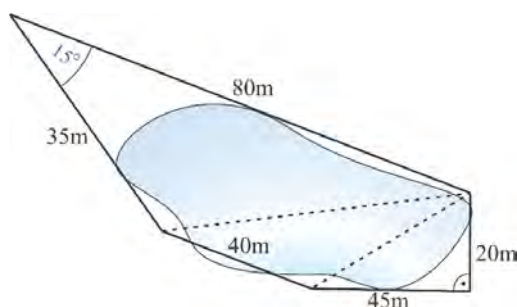
6. Cakto gjatësinë e diagonales BD të trapezit $ABCD$ nëse brinjët e trapezit janë $\overline{AB} = 11\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 5\text{cm}$, $\overline{DA} = 4,5\text{cm}$.

7. Cakto gjatësinë e brinjës a te $\triangle ABC$, nëse $b = 5$, $c = 7$ dhe $\alpha = 60^\circ$.

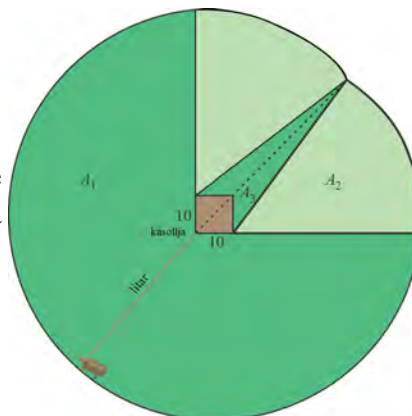
8. Cakto syprinën e tokës së ndërtimit të dhënë te skica:



9. Njehso përafërsisht syprinën e liqenit, si shumë prej syprinave të trekëndëshave të fituar. Shfrytëzoi të dhënat prej skicës:



10. Lopa është e lidhur me litar me gjatësi prej 100m . Kasollja ka formën e katrorit në pjesën me anë 10m . Përcaktoni sipërfaqen e seksionit të e kullosës që është treguar te figura, nëse lopa është lidhur për njërin kënd prej kasolles.



7. VEKTORËT NË HAPËSIRË

7.1. Koncepti për vektor në hapësirë

Në matematikë, në fizikë dhe në shkencat e tjera natyrore hasim me madhësi të cilat plotësisht janë përcaktuar me numrin e tyre matës, gjatë njësisë matëse të zgjedhur. Të atilla janë madhësitë: gjatësia e segmentit, syprina e figurës gjeometrike, masa e trupit fizik, temperatura, koha etj. Këto madhësi quhen **madhësi skalare** ose shkurtimisht, **skalar**.

Përveç madhësive skalare hasim edhe madhësi të atilla të cilat janë plotësisht të përcaktuara vetëm me numrin e tyre matës. Të atilla janë për shembull, madhësitë: forca, shpejtësia, nxitimi, forca e fushës magnetike e të tjera. Për përcaktimin e tyre përveç numrit matës duhet t'i dimë drejtimin dhe kahen e tyre. Këto madhësi është konstatuar të quhen **madhësi vektoriale** ose shkurtimisht, **vektor**.

Me madhësitë skalare, pasi ato janë plotësisht të përcaktuara vetëm me numrat realë, do të llogarisim si numra realë. Megjithatë, operacionet vetëm me numrat realë, do të llogarisim si numra realë. Megjithatë operacionet me madhësitë vektoriale do t'i përkufizojmë në veçanti. Operacionet mbi madhësitë vektoriale do të kenë veti analoge me vetitë e operacioneve përkatëse të numrave realë.

Vektor është segment i orientuar, më saktë segment një pikë e skajshme e të cilit llogaritet si e fillimit, kurse tjetra për mbarim të vektorit. Vektori me pikë të fillimit në pikën A dhe mbarimi te pika B shënohet me $\overrightarrow{AB}$ (figura 1) dhe quhet **vektor i lidhur** (për pikën A). Vektorët i shënojmë me shkronjat e vogla të alfabetit latin: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

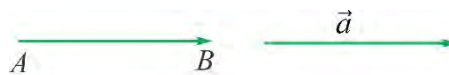


Figura 1

Çdo vektor karakterizohet me gjatësinë, drejtimin dhe kahen e tij. **Gjatësia** ose **moduli** i vektorit $\overrightarrow{AB}$ është gjatësia e segmentit AB , dhe shkruajmë $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$, **drejtimi i vektorit** është përcaktuar me drejtëzën te e cila shtrihet vektori, ndërsa **kahja e vektorit** është orientimi prej pikës së fillimit kah pika e mbarimit.

Nëse pikat A dhe B puthiten, atëherë vektorin AB e quajmë vektor zero, dhe shkruajmë $AB = 0$. Qartë, vektor zero ka gjatëso zero përkatësisht $|0| = 0$.

Për vektorët jozero $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ themi se janë **kolinear** nëse drejtëzat AB dhe CD janë paralele ose puthiten. Për vektorin zero do të llogarisim se është kolinear me çdo vektor.

Shembulli 1. Të vërtetojmë se pikat A , B dhe C janë kolineare nëse dhe vetëm nëse vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ janë kolinear.

Nëse pikat A , B dhe C janë kolinear, atëherë ato shtrihen te ndonjë drejtëz p , pra vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ shtrihen në drejtëzën p , përkatësisht ato janë kolineare.

Anasjelltas, nëse vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ janë kolinear, atëherë drejtëzat AB dhe AC janë paralele. Por, ato kanë pikë të përbashkët A , që do të thotë se puthiten, prej ku vijon se pikat A , B dhe C janë kolineare.

Për dy vektor kolinear $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ të cilët shtrihen në drejtëzën e njëjtë, themi se **kanë kahe të njëjtë**, nëse segmentet AC dhe BD nuk priten (figura 2a)).

Nëse vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ shtrihen në drejtëzën e njëjtë dhe nëse ekziston vektor $\overrightarrow{MN}$ i cili ka kahe të njëjtë me $\overrightarrow{AB}$ dhe me $\overrightarrow{CD}$, atëherë për vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ themi se kanë kahe të njëjtë (figura 2b)). Për dy vektor kolinear, të cilët nuk kanë kahe të njëjtë, themi se **kanë kahe të kundërta**.

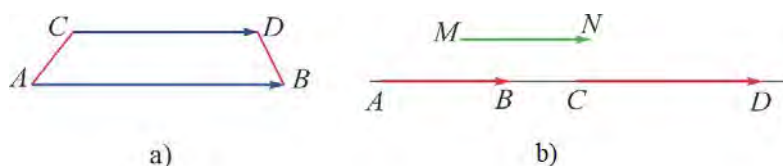


Figura 2

Për dy vektor themi se janë **të barabartë**, nëse ato janë kolinear, kanë kahe të njëjtë dhe kanë gjatësi të barabartë (intenzitet).

Nëse $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, atëherë vektori $\overrightarrow{BA}$ quhet **i kundërt** i $\vec{a}$ dhe shënohet me $-\vec{a}$.

Le të jetë $\vec{a}$ çfarëdo vektor dhe P është pika e fillimit në hapësirë. Sipas përkufizimit për barazi të vektorëve ekziston vektor të vetëm të lidhur $\overrightarrow{PQ}$ të barabartë me vektorin $\vec{a}$. Me fjalë të tjera, për çdo vektor pika e fillimit mund të zgjidhet çfarëdo, prandaj vektorët i shqyrtojmë me saktësi deri te pozita e tyre. Domethënë mundemi të llogarisim se vektori “zhvendoset” (në mënyrë translatore) në hapësirë pa e ndryshuar madhësinë e tij, drejtimin dhe kahen. Kështu me vektor do të nënkuptojmë **vektorë të lirë**, nëse ndryshe nuk është theksuar.

Shembulli 2. Te katrori $ABCD$ me qendër në pikën O (figura 3) janë paraqitur vektorët $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ dhe $\overrightarrow{AD}$.

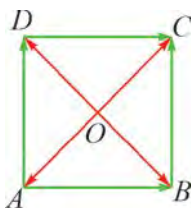


Figura 3

Ndërmjet veti të barabartë janë këto vektorë çift $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ dhe $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Detyra

1. Le të jenë O , A dhe B tri pika të ndryshme. Nëse pika O është mesi i segmentit AB , atëherë $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$. Vërteto!

2. Le të jetë ABC trekëndësh i dhënë dhe le të jenë M , N dhe P meset e brinjëve

AB , BC dhe CA , përkatësisht. E saktë është se:

- a) $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP}$; b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB}$; c) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NB}$;
 ç) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$; d) $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BN}$?

3. Le të jetë dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ diagonalet e të cilit priten në pikën O dhe le të jenë $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d}$. Cilët prej këtyre gjykimëve janë të saktë:

- a) $\overrightarrow{CB} = \vec{c}$; b) $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$; c) $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$; ç) $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$;
 d) $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$; dh) $\overrightarrow{AO} = \vec{d}$; e) $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$?

4. Le të jetë dhënë katrori $ABCD$ diagonalet e të cilit priten në pikën O . Cilët prej vektorëve: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{n}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DO} = \vec{q}$ janë të barabartë ndërmjet veti?

7.2. Mbledhja e vektorëve

Në bashkësinë e vektorëve të lirë do të përkufizojmë operacionin e mbledhjes së vektorëve me veti analoge të vetive të operacionit mbledhje të numrave real.

Mbledhja e vektorëve

Le të jenë O , A dhe B tri çfarëdo pika në hapësirë. Vektori i lidhur $\overrightarrow{OB}$ quhet shumë e vektorëve të lidhur $\overrightarrow{OA}$ dhe $\overrightarrow{AB}$ shkruajmë $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ (figura 1). Për ta caktuar shumën e tyre, veprojmë në këtë mënyrë:

- Zgjedhim çfarëdo pike O në hapësirë.
- E konstruktojmë vektorin $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
- Duke e marr pikën A si pikë fillestare, e konstruktojmë vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Vektori $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ quhet **shuma** e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, të quajtur **mbledhës**, dhe shkruajmë $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

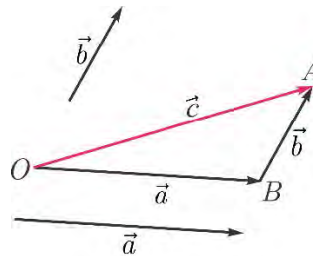


Figura 1

Mënyra sipër e parashtruar për mbledhjen e dy vektorëve quhet **rregulla e treshit**. Në vazhdim do të studiojmë **rregullën e paralelogramit** për mbledhjen e dy vektorëve.

Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Për ta caktuar shumën e tyre shkruajmë në këtë mënyrë:

- Zgjedhim çfarëdo pike O në hapësirë.
- I konstruktojmë vektorët $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
- Nëpër pikën A konstruktojmë drejtëz paralele me drejtëzën OB , por nëpër pikën B konstruktojmë drejtëz paralele me drejtëzën OA . Pikëprerjen e drejtëzave të fituara e shënojmë me C (figura 2).

Vektori $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ quhet **shuma** e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

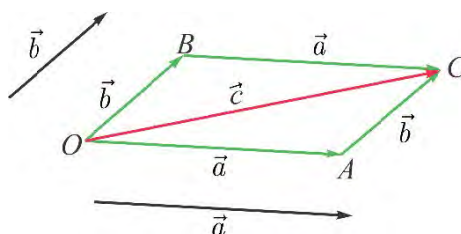


Figura 2

Nëse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolineare, atëherë të mundshme janë këto dy raste:

- a)** Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ kanë kahe të njëjtë (figura 3a). Atëherë shuma $\vec{a} + \vec{b}$ dhe kahen sikurse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, kurse për modulin vlen barazimi ka drejtimin

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

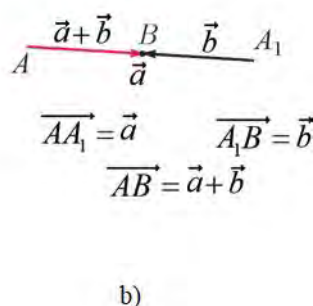
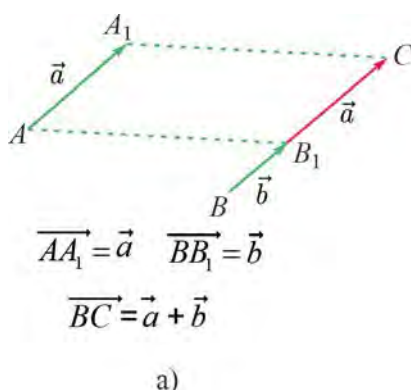


Figura 3

- b)** Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ kanë kahe të kundërta (figura 3b). Atëherë shuma ka drejtim sikurse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, kahja e vektorëve me modul më të madh, por për modulin vlen barazimi

$$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

Vetitë e operacionit mbledhje të vektorëve

Ta shënojmë me V bashkësinë e vektorëve të lirë. Do të parashikojmë disa veti të operacionit mbledhje të vektorëve të cilët dalin prej vet përkufizimit.

- 1.** Për çfarëdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ vlen $\vec{a} + \vec{b} \in V$.

Vetia vijon drejtpërdrejt prej përkufizimit të operacionit të vektorëve dhe e shpreh faktin se shuma prej dy vektorëve është vektor.

2. Për çfarëdo tre vektorë $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ vlen $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Vetia e tregon faktin se operacioni mbledhje e vektorëve është asociativ. Me të vërtetë, nëse $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ dhe $\vec{BC} = \vec{c}$, atëherë prej rregullës së trekëndëshit kemi (figura 4).

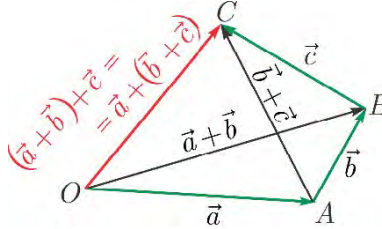


Figura 4

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}, \text{ dhe}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}.$$

3. Për çdo vektor $\vec{a} \in V$ dhe për vektorin zero $\vec{0}$ vlen $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Me të vërtetë, nëse $\vec{AB} = \vec{a}$, atëherë gjykimi vijon prej barazimit

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = \vec{a} \quad \text{dhe} \quad \vec{0} + \vec{a} = \vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} = \vec{a}$$

4. Për çdo vektor $\vec{a} \in V$ vlen $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Vetia tregon se çfarëdo vektor $\vec{a}$ i mbledhur me vektorin e tij të kundërt $-\vec{a}$ e jep vektorin zero.

5. Për çfarëdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ vlen $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

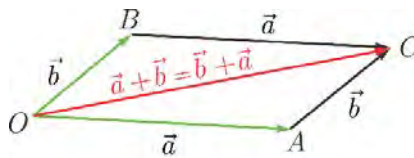


Figura 5

Vetia e tregon faktin se operacioni mbledhje e vektorëve është komutative (figura 5). Në të vërtetë, nëse $\vec{OA}, \vec{BC} = \vec{a}$ dhe $\vec{OB}, \vec{AC} = \vec{b}$, atëherë

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} \quad \text{dhe} \quad \vec{b} + \vec{a} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}.$$

Asociativiteti dhe Komutativiteti i operacionit mbledhje të vektorëve lejojnë gjatë mbledhjes së vektorëve:

- operacionet e shënuara t'i realizojmë në çfarëdo renditje,
- shumë vektor të zëvendësohen me shumën e tyre ose një vektor të zëvendësohet me shumën e tij

Shembulli 1. Për çfarëdo $\vec{b}, \vec{c} \in V$ vlen $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$.

Asociativiteti dhe komutativiteti i operacionit mbledhje të vektorëve, kemi $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$.

Me zbatimin e shumëfishtë të rregullës së trekëndëshit mund të gjendet vektor shumë i çdo numri të fundshëm të vektorëve.

Shembulli 2. Që ta caktojmë shumën e vektorëve $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ dhe $\vec{a}_5$, së pari i mbledhim vektorët $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$. Le të jetë O çfarëdo pikë dhe le të jetë $\vec{OA}_1 = \vec{a}_1$ dhe $\vec{A_1A_2} = \vec{a}_2$ (figura 6). Atëherë kemi se $\vec{OA_2} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Nëse prej pikës së skajshme A_2 të vektorit $\vec{OA_2}$ me bartjen e vektorit $\vec{A_2A_3} = \vec{a}_3$ kemi

$$\vec{OA_3} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3.$$

Më tutje, nëse prej pikës A_3 e bartim vektorin $\vec{A_3A_4} = \vec{a}_4$ kemi

$$\vec{OA_4} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \vec{a}_4.$$

Në fund e konstruktojmë vektorin $\vec{A_4A_5} = \vec{a}_5$ dhe e fitojmë shumën

$$\vec{OA_5} = (((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \vec{a}_4) + \vec{a}_5.$$

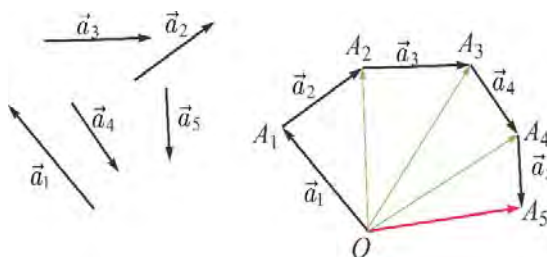


Figura 6

Detyra

1. Le të jetë $ABCDEF$ gjashtëkëndësh me qendër në pikën O . Cakto shumën e vektorëve $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ dhe $\vec{OD}$.

2. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe le të jetë S prerja e diagonaleve të tij. Thjesht shprehjet:

- a) $(\vec{BC} + \vec{SA}) + \vec{SC}$; b) $(\vec{AB} + \vec{DS}) + \vec{SA}$;
c) $\vec{DS} + (\vec{SA} + \vec{BC})$; ç) $(\vec{DS} + \vec{BC}) + (\vec{SA} + \vec{AB})$.

3. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$. Shpreh vektorët $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{ED}$ dhe $\vec{FE}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a} = \vec{AB}$ dhe $\vec{b} = \vec{AF}$.

4. Janë dhënë dy vektor jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Konstruktoi vektorët:

- a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $(-\vec{a}) + \vec{b}$; c) $(-\vec{b}) + \vec{a}$; ç) $(-\vec{a}) + (-\vec{b})$; d) $-(\vec{a} + \vec{b})$.

5. Le të jenë dhënë dy vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ të cilët nuk janë kolinear. Konstrukto vektorin $\vec{c}$, ashtu që $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$.

6. Le të jetë $ABCD$ drejtkëndësh. Nëse $AC = a$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, i konstruktojmë vektorët

- a) $\vec{a} + (-\vec{c})$; b) $\vec{a} + (-\vec{b})$; c) $\vec{b} + (-\vec{a})$; d) $\vec{c} + (-\vec{b})$.

7.3. Zbritja e vektorëve

Në bashkësinë e vektorëve do të fusim operacion të ri që është invers i operacionit mbledhje të vektorëve. Në mënyrë analoge, sikurse te numrat realë, operacioni invers i operacionit mbledhje, do ta quajmë **zbritje**.

Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. **Ndryshimi** i vektorit $\vec{a}$ me vektorin $\vec{b}$ quhet vektori $\vec{c}$ ashtu që $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, dhe shkruhet $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

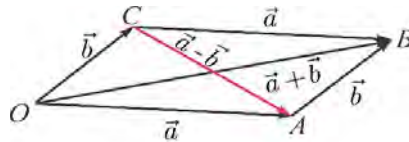


Figura 1

Vektori $\vec{a}$ është **zbritshmi**, kurse vektori $\vec{b}$ është **zbritësi**.

Prej paralelogramit $OACB$ te figura 1 mund të përcaktohet edhe shuma $\vec{a} + \vec{b}$ dhe ndryshimi $\vec{a} - \vec{b}$ i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Me të vërtetë prej $\vec{b} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ fitohet se

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CA}.$$

Operacionin zbritje i vektorëve do ta sjellim në lidhje me operacionin mbledhje. Përkatësisht, për shkak të asociativitetit dhe komutativitetit të operacionit mbledhje, kemi

$$\vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{b} + ((-\vec{b}) + \vec{a}) = (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

prej ku vijon se

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Prandaj, ndryshimi i vektorit $\vec{a}$ me vektorin $\vec{b}$ është i barabartë me shumën e vektorit me vektorin $-\vec{b}$ (vektori i kundërt i vektorit $\vec{b}$).

Prej diskutimit të sipërm vijon se te një barazim vektorial mund të caktohen anëtarët e barazimit t'i bartim prej njëres anë në tjetrën, pa u prish barazimi, njëjtë sikurse te barazimet me numra realë.

Shembulli 1. Prej barazimit vektorial $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ i fitojmë barazimet ekuivalente $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ dhe $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.

Shembulli 2. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Shprehi vektorët $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ dhe $\overrightarrow{A_5A_6}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{A_6A_1}$.

Drejtëpërdrejt përfundojmë se

$$\overrightarrow{A_4A_5} = -\overrightarrow{A_1A_2} = -\vec{a} \text{ dhe } \overrightarrow{A_3A_4} = -\overrightarrow{A_6A_1} = -\vec{b}.$$

Pasi $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_6A_1} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, prej trekëndëshit OA_2A_3 kemi se $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_3}$ (rregulla e trekëndëshit), përkatësisht $\vec{b} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}$. Prej këtu fitojmë se

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Në mënyrë të ngjashme prej trekëndëshit OA_3A_6 vijon se

$$\overrightarrow{A_3A_6} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Detyra

1. Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Konstrukto vektorët

a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{b} - \vec{a}$; ç) $-\vec{a} - \vec{b}$.

2. Nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektor reciprokisht normal dhe $|\vec{a}| = 6$ dhe $|\vec{b}| = 8$, njehso $|\vec{a} + \vec{b}|$ dhe $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Zgjidhi barazimet vektoriale

a) $\vec{a} + \vec{x} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$; b) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$.

4. Le të jetë $ABCD$ paralelogram i dhënë dhe le të jetë S prerja e diagonaleve të tij. Shpreh vektorët $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{DA}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$.

7.4. Shumëzimi i vektorit me skalar

Elementet e bashkësisë së numrave real zakonisht quhen skalar. Në bashkësinë e vektorëve do të përkufizojmë operacionin e shumëzimit të vektorit me skalar.

Le të jetë $\vec{a}$ vektor i dhënë dhe p skalar i dhënë.

Prodhiimi i vektorit $\vec{a}$ me skalarin p quhet vektori $\vec{b} = p\vec{a}$ i cili është kolinear me vektorin $\vec{a}$, e ka gjatësinë $|p| |\vec{a}|$, kahe të njëjtë sikurse vektori $\vec{a}$, nëse $p > 0$, kurse kahja e kundërt nëse $p < 0$. Nëse $p = 0$ ose $\vec{a} = \vec{0}$, atëherë $p\vec{a} = \vec{0}$.

Herësi i vektorit $\vec{a}$ me skalarin jozero p quhet vektori $\frac{1}{p} \vec{a}$, shkruhet $\frac{\vec{a}}{p}$.

Drejtëpërdrejt prej përkufizimeve të sipërme vijon se për çdo vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektori $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ është vektor njësi me drejtim dhe kahe të njëjtë sikurse edhe vektori $\vec{a}$.

Prandaj, kemi se $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$.

Do të përmendim disa veti të operacionit shumëzim të vektorit me skalar.

1. Për çdo numër real p dhe çdo $\vec{a} \in V$ vlen $p\vec{a} \in V$.

Vetia vijon drejtpërdrejt prej përkufizimit të operacionit shumëzim të vektorit me skalar.

2. Për çdo $a \in V$ dhe numër real 1 vlen $1\vec{a} = \vec{a}$.

Vetia vijon prej përkufizimit të operacionit të vektorit me skalar.

3. Për çdo numra realë p dhe q dhe çdo $\vec{a} \in V$ vlen

$$p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a} = q(p\vec{a}).$$

Vetia e sipërme parashikon se vektori shumëzohet me prodhim të skalarëve kur do të shumëzohet me njërin prej skalarëve, kurse pastaj me tjetrin.

4. Për çdo numra realë p dhe q dhe çdo $\vec{a} \in V$ vlen

$$(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}.$$

Vetia e sipërme tregon se vektori shumëzohet me shumën prej skalarëve kur do të shumëzohet me çdonjërin prej skalarëve, kurse pastaj vektorët e fituar do të mbliidhen.

5. Për çdo numra realë p dhe çdo $\vec{a}, \vec{b} \in V$ vlen $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Sipas vetisë së sipërme shuma prej dy vektorëve shumëzohet me skalar kur do të shumëzohet çdo vektor me skalar, kurse pastaj vektorët e fituar do të mbliidhen.

Shembulli 1. Shuma e dy skalarëve shumëzohet me shumën e dy vektorëve sikurse shumëzoheshin binom me binom.

$$(p+q)(\vec{a} + \vec{b}) = p(\vec{a} + \vec{b}) + q(\vec{a} + \vec{b}) = \quad (\text{vetia 4})$$

$$= p\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{a} + q\vec{b}. \quad (\text{vetia 5})$$

Shembulli 2. Për t'u konstruktuar vektorët:

a) $3\vec{a}$; b) $-\frac{\vec{b}}{3}$; c) $4\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; ç) $\frac{-2\vec{a}}{3} - \vec{b}$.

Sipas përkufizimit për shumëzimin e vektorit me skalar, vektorët $3\vec{a}$, $4\vec{a}$ dhe $-\frac{2\vec{a}}{3}$ janë kolinear me vektorin $\vec{a}$, kurse vektorët $\frac{\vec{b}}{2}$, $-\frac{\vec{b}}{3}$ dhe $-\vec{b}$ janë kolinear me vektorin $\vec{b}$ (figura 1).

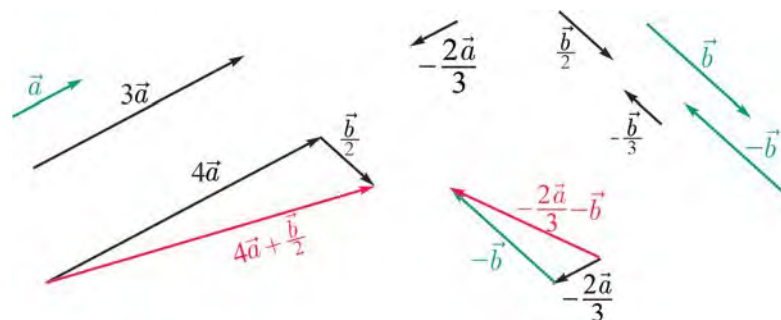


Figura 1

Shembulli 3. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC . Nëse pikat A_1 , B_1 dhe C_1 janë meset e brinjëve BC , CA dhe AB , përkatësisht, atëherë $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Prej barazimit

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \quad \text{dhe} \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

fitojmë se

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{AA} + \frac{\overrightarrow{BB}}{2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Detyra

1. Zgjidh çfarëdo vektor $\vec{a}$ dhe konstruktoi vektorët:

a) $4\vec{a}$; b) $-5\vec{a}$; c) $\frac{2\vec{a}}{3}$; ç) $-\sqrt{2}\vec{a}$; d) $\sqrt{3}\vec{a}$.

2. Zgjidh dy vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ të cilët nuk janë kolinear dhe konstrukto vektorët:

a) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; b) $4\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3}$; c) $-\frac{\vec{a}}{2} + 2\vec{b}$; ç) $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$.

3. Zgjidh katër vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dhe $\vec{d}$ dhe konstruktoi vektorët:

a) $\vec{a} - 4\vec{b} + (2\vec{c} - 3\vec{d})$; b) $4\vec{a} + 3(2\vec{b} - 5\vec{c})$; c) $\vec{b} - (\vec{a} + 3\vec{d}) - 2\vec{c}$.

4. Thjeshtoi shprehjet

a) $2(\vec{a} - \vec{b}) + 4(3\vec{a} - \vec{b}) + 5(\vec{a} + 2\vec{b})$; b) $3(\vec{a} + 4\vec{b} + 7\vec{c}) + 3\vec{b} + 3(2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c})$.

5. Zgjidhe barazimin vektorial sipas të panjohurës $\vec{x}$:

a) $4\vec{x} - 2\vec{a} + 6\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{x}$; b) $3(\vec{a} + \vec{x}) - 4\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{x} = 5(\vec{a} - \vec{b} + \vec{x})$.

6. Le të jenë pikat A , B , C dhe D çfarëdo pika dhe le të jenë M dhe N meset e segmenteve AB dhe CD , përkatësisht. Vërteto se

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

7.5. Pjesëtimi i vektorëve kolinear

Herësi i dy vektorëve kolinear është herësi i moduleve të tyre, të marrë me shenjë pozitive, nëse vektorët kanë kahe të njëjtë, dhe me shenjë negative nëse vektorët kanë kahe të kundërta. Më preciz, nëse vektorët $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) janë kolinear, atëherë **herësi** i tyre përkufizohet sikurse

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \quad \text{për kahe të njëjtë të } \vec{a}_1 \text{ dhe } \vec{a}_2, \text{ dhe}$$

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \quad \text{për kahe të kundërta të } \vec{a}_1 \text{ dhe } \vec{a}_2.$$

Drejtëpërdrejt prej përkufizimit vijon se nëse vektorët $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$)

janë kolinear, atëherë

$$\vec{a}_1 = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2, \text{ për kahe të njëjtë të } \vec{a}_1 \text{ dhe } \vec{a}_2, \text{ dhe}$$

$$\vec{a}_1 = -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2, \text{ për kahe të kundërt të } \vec{a}_1 \text{ dhe } \vec{a}_2.$$

Me fjalë të tjera, nëse vektorët $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) janë kolinear, atëherë ekziston skalar p ashtu që

$$\vec{a}_1 = p\vec{a}_2.$$

Diskutimi i sipërm mundëson analizë të bashkësisë së zgjidhjeve të barazimit

$$p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$$

ku $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektor të dhënë, kurse p dhe q janë çfarëdo skalar.

Vërejmë se barazimi gjithmonë është i mundshëm, pasi për $p = 0$ dhe $q = 0$ kemi $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Domethënë, çifti i skalarëve $(0, 0)$ është zgjidhje triviale e barazimit për çdo zgjedhje të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Parashtrohet pyetja se a ekzistojnë skalar p dhe q prej të cilëve të paktën njëri të jetë i ndryshëm prej zeros ashtu që vektori $p\vec{a} + q\vec{b}$ të jetë i barabartë me vektorin zero. Përgjigja me siguri nuk varet prej zgjedhjes së vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$:

- Nëse $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, çdo çift i renditur $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ e kënaq barazimin, pra do të thotë $\mathbb{R}^2$ është bashkësia e zgjidhjeve të barazimit.

- Nëse të barazimit $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ kemi se $\{(p, 0) \mid p \in \mathbb{R}\}$ është bashkësia e zgjidhjeve të barazimit.

- Nëse vektorët $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ janë kolinear, atëherë $\vec{a} = k\vec{b}$, për ndonjë skalar k . Në këtë rast barazimi është ekuivalent me barazimin $(kp + q)\vec{b} = \vec{0}$. Bashkësia e zgjidhjeve $\{(p, -kp) \mid p \in \mathbb{R}\}$ fitohet prej barazimit skalar $kp + q = 0$, e cila patjetër të jetë i kënaqur vektori $(kp + q)\vec{b}$ i barabartë me vektorin zero në pajtim me supozimin $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- Nëse vektorët $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ nuk janë kolinear, zgjidhja triviale $(0, 0)$ është zgjidhje e vetme e barazimit. Supozimi për ekzistimin e zgjidhjes jotriviale (p, q) ku pa humbur nga përgjithësia, p.sh. $p \neq 0$ tërheq saktësinë e barazimit $\vec{a} + \frac{q}{p} \vec{b} = \vec{0}$ ose $\vec{a} = -\frac{q}{p} \vec{b}$ që i kundërshton supozimit se vektorët nuk janë kolinear.

Shembull 1. Vërtetimi se pikëprerja e diagonaleve të çdo paralelogramit është mesi i tyre.

Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe le të jetë S pikëprerja e diagonaleve të tij (figura 1).

Vektori $\overrightarrow{AS}$ është kolinear me vektorin $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, pra

$$\overrightarrow{AS} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \text{ për ndonjë skalar } \lambda.$$

Ngjashëm, vektori $\overrightarrow{BS}$ është kolinear me vektorin $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, pra kemi

$$\overrightarrow{BS} = \mu(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}), \text{ për ndonjë skalar } \mu.$$

Prej $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$, kemi se $(\lambda + \mu - 1)\overrightarrow{AB} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AD}$ nuk janë kolinear, pra, pasi $\lambda + \mu - 1 = 0$ dhe $\lambda - \mu = 0$, prej ku vijon $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

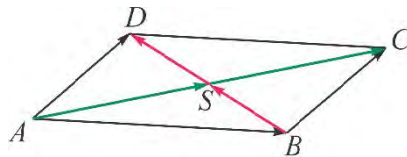


Figura 1

Detyra

1. Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ le të mos jenë kolinear. Cakto skalarët x dhe y , nëse

a) $(x + y)\vec{a} + (x - y - 6)\vec{b} = \vec{0}$; b) $(3x + y)(\vec{a} + \vec{b}) = (x - 1)\vec{a} - (x + y - 5)\vec{b}$.

2. Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ le të mos jenë kolinear. Për cilën vlerë të parametrin p vektorët $\vec{c} = (p - 1)\vec{a} + \vec{b}$ dhe $\vec{d} = (2 + 3p)\vec{a} - 2\vec{b}$ janë kolinear?

3. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe le të jetë N mesi i brinjës AB , kurse M është mesi i brinjës AD . Shprehe vektorin $\overrightarrow{AT}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, nëse T është pikëprerja e drejtëzave MB dhe ND .

7.6. Koordinatat e vektorit

Deri tani vektorët i japim grafikisht me ndihmën e segmenteve të orientuara. Futja e mënyrës koordinative të dhënies së vektorëve është baza për shfrytëzimin e qasjes algjebrike në zgjidhjen e detyrave gjeometrike.

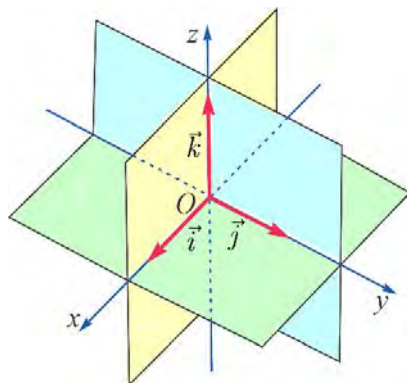


Figura 1

Në hapësirë le të jenë dhënë tre vektorë reciprokisht normalë $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$ të atillë që $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, dhe pika e fiksuar O . I konstruktojmë vektorët $\vec{OX} = \vec{i}$, $\vec{OY} = \vec{j}$ dhe $\vec{OZ} = \vec{k}$ çdonjëra prej drejtëzave OX , OY dhe OZ e zgjedhim kahen pozitive të vektorëve $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$ përkatësisht (figura 1). Drejtëzat e fituara i quajmë **boshtet koordinative**, drejtëza quhet boshti x ose abshisa, e dyta boshti y ose ordinata, kurse e treta boshti z ose aplikata. Të tre rrafshet të përcaktuar me çiftet e boshteve xy , yz dhe xz quhen **rrafshet koordinative**.

Te të tre boshtet numerike për njësi mase për gjatësi e zgjedhim gjatësinë e vektorit koordinativ. Për këtë shkak vektorët koordinativ i quajmë edhe **vektor njësi**.

Me zgjedhjen e pikës O dhe vektorët $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$ kemi zgjedhur **sistemi kënddrejtë koordinativ të Dekartit**, të cilin do ta shënojmë me $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pika O quhet **fillimi koordinativ**, kurse vektorët $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$ **koordinatat e vektorëve**.

Le të jetë $\vec{a}$ çfarëdo vektor në hapësirë dhe le të jetë $\vec{OA} = \vec{a}$ (figura 2). Nëpër pikën A tërheqim drejtëz paralele me boshtin z , dhe me B e shënojmë prerjen e kësaj drejtëze me rrafshin xy . Nëpër pikën B tërheqim drejtëza paralele me boshtet x dhe boshtin y , dhe pikëprerjet e tyre me boshtin y dhe boshtin x i shënojmë me A_y dhe A_x përkatësisht. Në fund, nëpër pikën A tërheqim drejtëz paralele me drejtëzën OB dhe prerja e tyre me boshtin z e shënojmë me A_z (figura 2).

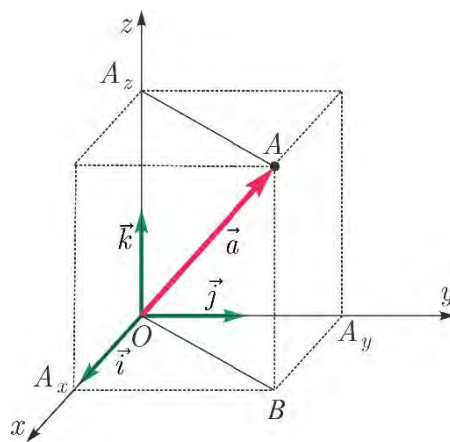


Figura 2

Prej përkufizimit të mbledhjes së vektorëve kemi

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OA}_z \quad \text{dhe} \quad \vec{OB} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y$$

prej ku vijon se

$$\vec{a} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z.$$

Pasi vektorët $\vec{OA}_x$ dhe $\vec{i}$ janë kolineare, ekziston numër real a_x të atillë $\vec{OA}_x = a_x \vec{i}$. Ngjashëm, ekzistojnë numra realë a_y dhe a_z të atillë që $\vec{OA}_y = a_y \vec{j}$ dhe $\vec{OA}_z = a_z \vec{k}$.

Ashtu, e fitojmë zbërthimin

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

të vektorit $\vec{a}$ nëpërmjet vektorëve koordinativ $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$.

Koeficientët të zbërthimi i vektorit të dhënë $\vec{a}$ quhen **koordinatat** vektorit në lidhje me sistemin koordinativ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Shënimi

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

është **paraqitja koordinative** e vektorit $\vec{a}$. Poashtu a_x quhet **koordinata e parë**, a_y **koordinata e dytë** a_x , por a_z quhet **koordinata e tretë** e vektorit $\vec{a}$.

Paraqitjet koordinative të vektorëve njësi janë

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ dhe } \vec{k} = (0, 0, 1),$$

kurse për vektorin zero vlen $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Shembulli 1. Vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ ka koordinata $a_x = 3$, $a_y = -2$ dhe $a_z = 5$, por vektori $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{k}$ ka koordinata $b_x = \frac{1}{2}$, $b_y = 0$ dhe $b_z = -\frac{3}{4}$.

Treshja e renditur $(3, -2, 5)$ është paraqitja koordinative e vektorit $\vec{a}$, kurse $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4})$ është paraqitja koordinativ e vektorit $\vec{b}$. (figura 3)

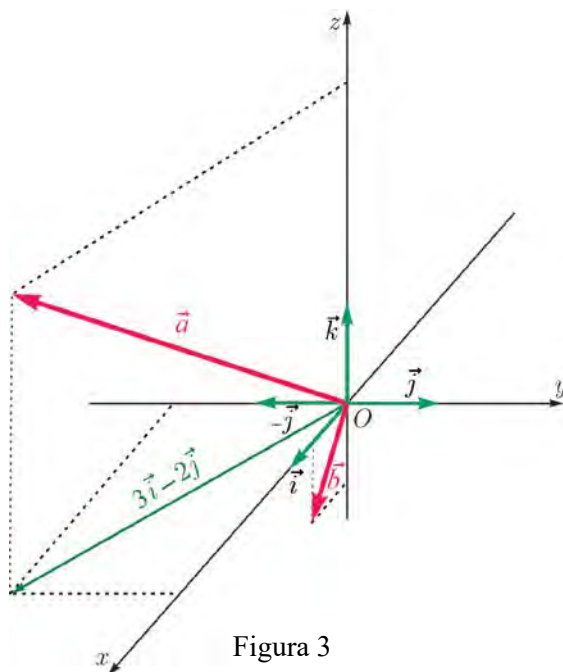


Figura 3

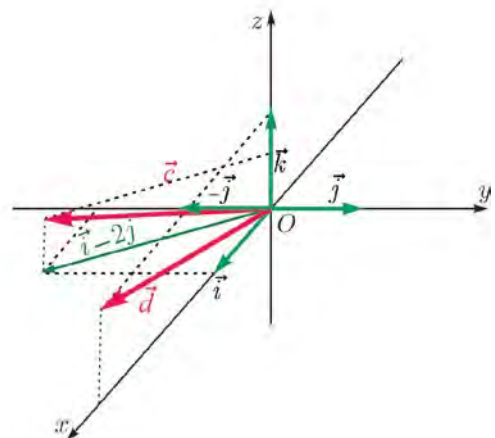


Figura 4

Treshja e renditur $\left(1, -2, \frac{3}{2}\right)$ dhe $(-3, 0, 1)$ janë paraqitja koordinative e vektorëve $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$ dhe $\vec{d}$ përkatësisht. Te figura 4 vektorët $\vec{c}$ dhe $\vec{d}$ janë paraqitur gjeometrisht në sistemin koordinativ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Detyra

1. Shkruaj paraqitjet koordinative të vektorëve:

a) $a = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; b) $a = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$; c) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$; ç) $\vec{a} = \vec{j} + 6\vec{k}$.

2. Zbërthej vektorët

a) $a = (7, -3, 5)$ b) $a = (4, -2, 0)$ c) $\vec{a} = (-1, 0, 5)$ ç) $\vec{a} = (0, 1, 0)$

sipas vektorëve koordinativ.

3. Në sistemin koordinativ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ konstrukto vektorët:

a) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ b) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ c) $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ ç) $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{k}$.

4. Konstrukto vektorët:

a) $\vec{a} = (2, 4, 1)$; b) $\vec{a} = \left(3, -2, -\frac{1}{3}\right)$; c) $\vec{a} = (-4, 3, 0)$; ç) $\vec{a} = (0, 1, -5)$.

7.7. Operacionet me vektorët në formën koordinative

Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dhe $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Atëherë prej

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ dhe } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

kemi se

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

përkatësisht

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

Prandaj, çdo koordinatë e shumës së dy vektorëve është e barabartë me shumën e koordinatave përkatëse të vektorëve, kurse çdo koordinatë e ndryshimit të një vektori me tjetër është e barabartë me ndryshimin e koordinatave përkatëse të vektorëve.

Shembulli 1. Nëse $\vec{a} = (1, 4, -2)$ dhe $\vec{b} = (-1, 3, 0)$, atëherë paraqitja koordinative e shumës $\vec{a} + \vec{b}$ dhe ndryshimi $\vec{a} - \vec{b}$ janë, përkatësisht,

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 4, -2) + (-1, 3, 0) = (1 + (-1), 4 + 3, -2 + 0) = (0, 7, -2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 4, -2) - (-1, 3, 0) = (1 - (-1), 4 - 3, -2 - 0) = (2, 1, -2).$$

Le të jetë dhënë vektori $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dhe le të jetë λ çfarëdo skalar. Atëherë prej zbërthimit $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ gjejmë se

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$

përkatësisht

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Domethënë, çdo koordinatë e prodhimit të një vektori me skalar është i barabartë me prodhimin e koordinatës përkatëse të vektorit me skalarin e dhënë.

Shembulli 2. Nëse $\vec{a} = (2, -1, 0)$, atëherë paraqitja koordinative e vektorëve $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$ dhe $\frac{1}{3}\vec{a}$ janë përkatëse

$$3\vec{a} = 3(2, -1, 0) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 0) = (6, -3, 0)$$

$$-2\vec{a} = -2(2, -1, 0) = (-2 \cdot 2, (-2) \cdot (-1), (-2) \cdot 0) = (-4, 2, 0)$$

$$\frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(2, -1, 0) = \left(\frac{1}{3} \cdot 2, \frac{1}{3} \cdot (-1), \frac{1}{3} \cdot 0\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Përfundimet e fituara për mbledhje të dy vektorëve dhe shumëzimi i vektorit me skalar, kur vektorët janë dhënë me koordinatat e veta mund të përgjithësohet në shumë vektor të fundshëm.

Nëse $\vec{a}_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $\vec{a}_2 = (p_2, q_2, r_2)$, ..., $\vec{a}_k = (p_k, q_k, r_k)$ janë dhënë vektorët dhe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ janë skalar të dhënë, atëherë vektori $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ ka koordinata

$$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_k q_k, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k).$$

Shembulli 3. Nëse $\vec{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, -2)$ dhe $\vec{a}_4 = (-2, 0, 0)$, atëherë koordinatat e vektorëve $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ dhe $2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - 3\vec{a}_4$, përkatësisht janë

$$2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 4 \cdot 0, 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) = (2, 9, 6)$$

$$2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - 3\vec{a}_4 = (8, 3, 0).$$

Detyra

1. Gjeji koordinatat e shumës së vektorëve $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$, nëse

a) $\vec{a}_1 = (3, 1, -1)$ dhe $\vec{a}_2 = (2, -5, 1)$; **b)** $\vec{a}_1 = (-1, -3, 7)$ dhe $\vec{a}_2 = (4, 9, -2)$.

2. Shkruaj koordinatat e ndryshimit të vektorëve $\vec{a}_1$ dhe $\vec{a}_2$, nëse:

a) $\vec{a}_1 = (-4, 1, 7)$ dhe $\vec{a}_2 = (2, -5, -3)$; **b)** $\vec{a}_1 = (6, -1, 0)$ dhe $\vec{a}_2 = (4, -5, 3)$.

3. Janë dhënë vektorët $\vec{a}_1 = (0, -3, 2)$ dhe $\vec{a}_2 = (1, -3, -1)$. Gjeji koordinatat e vektorëve

a) $2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$;

b) $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2$;

c) $4\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

4. Për vektorët $\vec{a}_1 = (0, 0, -4)$, $\vec{a}_2 = (3, -4, -3)$, $\vec{a}_3 = (-1, 3, 0)$ dhe $\vec{a}_4 = (0, -2, 1)$, shkruaj koordinatat e vektorëve

a) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$; b) $\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$; c) $4\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 - \vec{a}_4$.

7.8. Ndarja e segmenti në raport të dhënë

Në hapësirë le të jetë zgjedhur sistemi kënddrejtë i Dekartit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dhe le të jetë M çfarëdo pike. Vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ me fillim në fillimin koordinativ dhe mbarimi te pika M quhet **rrezevektor** i pikës M (figura 1).

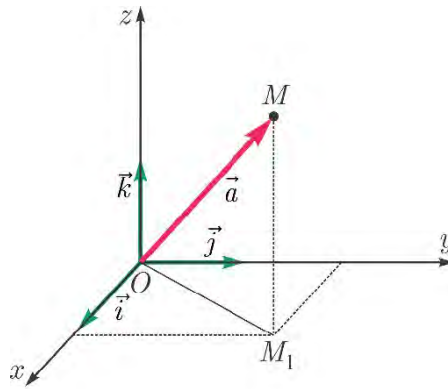


Figura 1

Pozita e pikës M në hapësirë është plotësisht e përcaktuar me rrezevektorin e saj $\vec{r}$, kurse ai pra është plotësisht i përcaktuar me koordinatat e tij në lidhje me sistemin koordinativ të zgjedhur. Pika M si pikë e mbarimit të vektorit $\vec{r}$ do të jetë e përcaktuar me të njëjtat. Prandaj, nëse $\vec{r} = (x, y, z)$, atëherë koordinatat e x, y dhe z të vektorit $\vec{r}$ i quajmë **koordinata** të pikës M , dhe shkruajmë $M(x, y, z)$.

Le të jetë dhënë segmenti M_1M_2 pikat e skajshme të të cilit i kanë koordinatat $M_1(x_1, y_1, z_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2, z_2)$, dhe pika M le ta ndan segmentin M_1M_2 në raport q , përkatësisht $M_1M : MM_2 = m : n$ (figura 2).

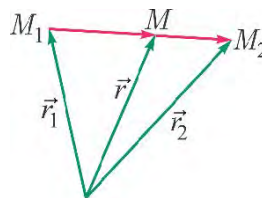


Figura 2

T'i shënojmë me $\vec{r}_1$ dhe $\vec{r}_2$ rrezevektorët e pikës M_1 dhe M_2 , por me $\vec{r}$ rrezevektori i pikës M . Të vërejmë se

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad \text{dhe} \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}_2 - \vec{r}.$$

Pasi vektorët $\overrightarrow{M_1M}$ dhe $\overrightarrow{MM_2}$ janë kolinear vlen $\overrightarrow{M_1M} : \overrightarrow{MM_2} = m : n$ prej ku fitohet $\vec{r} - \vec{r}_1 = \frac{m}{n}(\vec{r}_2 - \vec{r})$. Prandaj rrezevektori i pikës M është përcaktuar me formulën

$$\vec{r} = \frac{nr_1 + mr_2}{m+n},$$

përkatësisht

$$\vec{r} = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right).$$

Prej këtu fitohet se

$$M \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right).$$

Nëse pika M është mesi i segmentit të $M_1 M_2$ atëherë $q=1$ dhe rrezevektori i pikës M të përcaktuar me relacionin

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}.$$

Për koordinatat e pikës së mesme M të segmentit M_1M_2 kemi

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Shembulli 1. Kordinatat e pikës P që e ndan segmentin AB në raport $1 : 2$, nëse $A(3, -2, 1)$ dhe $B(0, 2, -5)$ janë

$$P \left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{1+2}, \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0}{1+2}, \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1+2} \right) = P(2, -2, 1).$$

Detyra

1. Gjeji koordinatat e mesit $M(x, y, z)$ të segmentit AB , nëse

a) $A(0, -2, 1)$ dhe $B(-2, 4, 1)$

b) $A(-4, 0, 5)$ dhe $B(6, 0, -7)$.

2. Janë dhënë pikat $A(-1, 8, -2)$ dhe $M(7, -4, 0)$. Shkruaj koordinatat e pikës B nëse M është mesi i segmentit AB .

3. Janë dhënë pikat $A(0, 2, 2)$ dhe $B(6, 2, 4)$. Gjeji koordinatat e pikës M e cila segmentin AB e ndan në raport

a) $2 : 3$

b) $3 : 2$

c) $1 : 3$.

4. Le të jetë $A(-8, 14, -6)$, $B(9, -7, -10)$ dhe $C(0, -3, 20)$ janë kulmet e trekëndëshit. Gjeji koordinatat e meseve të brinjëve të tij.

7.9. Prodhimi skalar i vektorëve

Koncepti për prodhimin skalar të vektorëve

Përveç operacioneve mbledhje, zbritje dhe shumëzim të vektorit me skalar, ka kuptim edhe **shumëzimi i vektorëve**. Shumëzimi i dy vektorëve mund të përkufizohet në dy mënyra varësisht prej asaj se a duam rezultati prej operacionit të realizuar të jetë skalar ose vektor. Prandaj, do të dallojmë edhe shumëzim vektorial të dy vektorëve.

Para se të kalojmë në futjen e konceptit prodhim skalar do të fusim konceptin për këndin ndërmjet dy vektorëve. Përkatësisht, nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë çfarëdo dy vektor ashtu që $\vec{OA} = \vec{a}$ dhe $\vec{OB} = \vec{b}$, atëherë **këndi** ndërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është këndi ndërmjet gjysmëdrejtëzave OA dhe OB dhe do ta shënojmë me $(\vec{a}, \vec{b})$. Të theksojmë se $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

Përkufizimi 1. Prodhimi skalar i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ quhet numri i barabartë me prodhimin e gjatësiave të vektorëve dhe kosinuset prej këndit ndërmjet tyre, dhe shënohet me $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ose $\vec{a}\vec{b}$.

$$\text{Domethënë, } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Drejtëpërdrejt prej përkufizimit të prodhimit skalar vijon se

- Nëse këndi ndërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është i ngushtë, atëherë $\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, i prodhimit skalar është numër pozitiv. Ngjashëm, nëse këndi është i gjerë, atëherë prodhimi skalar është numër negativ

- Nëse vektorët janë kolinearë, këndi ndërmjet tyre është 0, pra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, domethënë $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$. Pra, vlen edhe $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

- Për vektorët reciprokisht normal a dhe b vlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, pasi $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

- Nëse të paktën njëri prej vektorëve është zero, atëherë edhe prodhimi skalar është i barabartë me zero.

Shembulli 1. Prodhimi skalar i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, për të cilët

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$, është numri

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = 10\sqrt{2}$$

b) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$, është numri

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 6 \cdot \cos 135^\circ = -9\sqrt{2}.$$

Vetitë e prodhimit skalar të vektorëve

Në vazhdim do të përmendim disa veti të prodhimit skalar.

1. Për çfarëdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ vlen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{vetia komutative})$$

Vetia e sipërme tregon se te shumëzimi skalar i vektorëve nuk është i rëndësishëm renditja e vektorëve të cilët e përbëjnë prodhimin.

2. Për çfarëdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ dhe për çfarëdo numër real p vlen

$$p(\vec{a}\vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (p\vec{b}) \quad (\text{vetia asociative})$$

Sipas vetisë së shprehur, prodhimi skalar shumëzohet me çfarëdo numër real kur do të shumëzohet çfarëdo vektor me numrin e dhënë real.

3. Për çfarëdo tre vektorë $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ vlen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{dhe} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{vetia distributive})$$

Vetia e sipërme tregon se deri te vektori i njëjtë arrijmë, nëse dy vektor mbliidhen dhe pastaj në mënyrë skalare shumëzohen me vektorin e tretë, ose nëse çdonjëri prej mbledhësve shumëzohet me vektorin e tretë dhe pastaj mbliidhen. Poashtu, nuk është e rëndësishme renditja e shumëzuesve.

Shembulli 2. Me ndihmën e vetive të sipërme për prodhimin skalar të vektorëve $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$ dhe $\vec{b} = 12\vec{p} - 5\vec{q}$, ku $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$ dhe $(\vec{p}, \vec{q}) = 30^\circ$, kemi $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 4\vec{q})(12\vec{p} - 5\vec{q}) = 36|\vec{p}|^2 + 33(\vec{p} \cdot \vec{q}) - 20|\vec{q}|^2 = 556 + 66\sqrt{3}$.

Detyra

1. Njehso prodhimin skalar:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $\vec{a}^2$; c) $\vec{b}^2$;

nëse $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

2. Njehso prodhimin skalar:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $\vec{a}^2$; c) $\vec{b}^2$;

nëse $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 12^\circ$

3. Cakto shenjën e prodhimit skalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ dhe $\vec{b} \neq \vec{0}$, nëse

a) $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$; b) $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

4. Gjeje prodhimin skalar të vektorëve $\vec{u} = \vec{x} - 2\vec{y}$ dhe $\vec{v} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$, nëse $|\vec{x}| = 6$, $|\vec{y}| = 3$, dhe $(\vec{x}, \vec{y}) = 60^\circ$.

5. Njehso vlerën e shprehjes

a) $(p - q)(2p + q)$; b) $p \cdot (p - 3q)$; c) $(\vec{p} - \vec{q})(\vec{p} + \vec{q})$;

nëse $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 3$ dhe $(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$.

7.10. Zbatimi i prodhimit skalar të vektorëve

Drejtëpërdrejt prej përkufizimit të prodhimit skalar mund të realizojmë disa formula të cilat gjejnë zbatim në zgjidhjen e detyrave gjeometrike.

Njehsimi i gjatësisë së vektorit

Ta njehsojmë gjatësinë $|\vec{a}|$ e vektorit $\vec{a}$, nëse dihet prodhimi skalar i vektorit me vetveten. Prej $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ me rrënjëzimin gjejmë se

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2}.$$

Drejtëpërdrejt përfundojmë se $|\vec{a}| = 0$ nëse dhe vetëm nëse $\vec{a} = \vec{0}$.

Shembulli 1. Nëse për vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vlen $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, atëherë gjatësia e vektorit $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ është e barabartë me

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{16 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 9} = \sqrt{28}. \end{aligned}$$

Njehsimi i kosinusit ndërmjet dy vektorëve jozero

Ta njehsojmë këndin ndërmjet dy vektorëve jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, është i njohur prodhimi i tyre skalar. Prej përkufizimit për prodhimin skalar kemi se

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

prej ku gjejmë se

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Shembulli 2. Për ta gjetur kosinusin prej këndit ndërmjet vektorëve $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ dhe $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$, për të cilët $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, në pajtim me formulën për njehsimin e këndit ndërmjet dy vektorëve jozero

$$\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|}$$

është e nevojshme t'i gjejmë vlerat $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ dhe $\vec{c} \cdot \vec{d}$. Kemi se

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{\vec{d} \cdot \vec{d}} = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2^2 = 1.$$

$$\text{Prandaj } \cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{52}} \approx 0,13.$$

Kushti për dy vektor ortogonal

Nëse $\vec{a} \neq \vec{0}$ dhe $\vec{b} \neq \vec{0}$, atëherë $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ nëse dhe vetëm nëse $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, që do të thotë $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Kështu, **kushti për dy vektor ortogonal jozero** është:

Dy vektor jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë ortogonal nëse dhe vetëm nëse $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Shembulli 3. Vërtetoje teoremën e Talesit: Çdo kënd periferik mbi diametrin të vijës rrethore është i drejtë.

Le të jetë $K(O, r)$ vija rrethore, AB diametri i saj dhe C çfarëdo pikë prej vijës rrethore (figura 1).

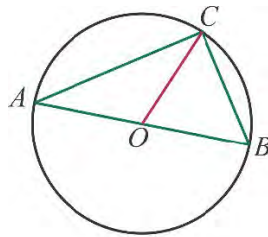


Figura 1

Atëherë $\vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA}$, $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{CO} - \vec{OA}$, pra kemi se

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{CO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{CO} - \vec{OA}) = \vec{CO}^2 - \vec{OA}^2 = r^2 - r^2 = 0$$

prej ku vijon se vektorët $\vec{CA}$ dhe $\vec{CB}$ janë vektor reciprokisht normal, përkatësisht $\angle ACB = 90^\circ$.

Detyra

1. Janë dhënë vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, për të cilët vlen $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ dhe $(\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$. Gjeji gjatësinë e vektorit $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

2. Gjeji kosinusin e këndit ndërmjet vektorëve $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ dhe $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, nëse $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

3. Janë dhënë vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, ashtu që $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ dhe $(\vec{c}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 60^\circ$. Njehso kosinusin e këndit ndërmjet vektorëve $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ dhe $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$.

4. Vërteto teoremën e Pitagorës: shuma e katrorëve të katetave të trekëndëshi kënddrejtë është i barabartë me katrorin e hipotenuzës.

5. Gjeje këndin që e formojnë vektorët njësi $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, nëse vektorët $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ dhe $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ janë reciprokisht normal.

7.11. Prodhimi skalar i vektorëve në formën koordinative

Në këtë mësim do të mësojmë se si njehsojmë prodhim skalar të vektorëve, gjatësia e vektorit, këndi ndërmjet dy vektorëve jozero dhe do ta realizojmë dy vektor ortogonal, në rastin kur vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre.

Njehsimi i prodhimit skalar të vektorëve në formën koordinative

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ dhe } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

atëherë vlejné zbërthimet

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ dhe } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Për shkak të vetisë asociative, vetisë komutative dhe vetisë distributive të prodhimit skalar, kemi

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} + \\ &\quad + (a_x b_y + a_y b_x) \vec{i} \cdot \vec{j} + (a_x b_z + a_z b_x) \vec{i} \cdot \vec{k} + (a_y b_z + a_z b_y) \vec{j} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Pasi vektorët $\vec{i}, \vec{j}$ dhe $\vec{k}$ janë vektor njësi dhe në çifte reciprokisht normal, kemi

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ dhe } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Prandaj, për prodhimin skalar kemi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Shembulli 1. Nëse $\vec{a} = (-2, 0, 6)$ dhe $\vec{b} = (1, -1, 5)$, atëherë prodhimi skalar është

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 5 = 28.$$

Zbatimi i prodhimit skalar në formën koordinative

Gjatësia $|\vec{a}|$ e vektorit të dhënë me koordinatat e veta $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ është

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Prandaj, kemi se formula për njehsimin e gjatësisë është

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Shembulli 2. Nëse $\vec{a} = (3, -1, 4)$, atëherë gjatësia e tij është

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$

Kosinusi i këndit ndërmjet dy vektorëve jozero të dhënë me koordinatat e tyre $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dhe $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ është

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Prandaj, formulat për njehsimin e kosinuset të këndit ndërmjet tyre është

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Shembulli 3. Për këndin ndërmjet vektorëve $\vec{a} = (2, 0, 2)$ dhe $\vec{b} = (0, 0, 6)$ fitohet

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{12}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

prej ku vijon se $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Dy vektor jozero $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dhe $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ janë ortogonal nëse dhe vetëm nëse $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Prandaj, kushti për dy vektor jozero ortogonal në formën koordinative është

Dy vektor jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë ortogonal nëse dhe vetëm nëse $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Shembulli 4. Gjeje këndin ndërmjet diagonaleve të paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a} = (2, 1, 0)$ dhe $\vec{b} = (0, -2, 1)$.

Le të jetë $ABCD$ paralelogram i dhënë dhe le të jetë $\vec{AB} = \vec{a}$ dhe $\vec{AD} = \vec{b}$ (figura 1).

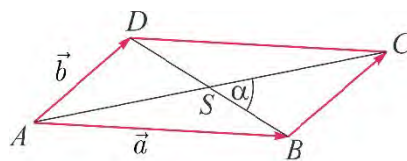


Figura 1

Këndi i kërkuar α është këndi ndërmjet vektorëve $\vec{AC}$ dhe $\vec{DB}$ dhe mund të njehsojmë sipas formulës $\cos \alpha = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{DB}}{|\vec{AC}| |\vec{DB}|}$.

Prodhiimi skalar i vektorëve

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 1) \text{ dhe } \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b} = (2, 3, -1)$$

$$\text{është } \vec{AC} \cdot \vec{DB} = (2, -1, 1) \cdot (2, 3, -1) = 4 - 3 - 1 = 0$$

që do të thotë se vektorët $\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{DB}$ janë ortogonal, pra $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Detyra

1. Njehso prodhimin skalar të vektorëve

a) $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ dhe $\vec{b} = (0, -4, 7)$; b) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ dhe $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} +$

2. Njehso gjatësinë e vektorit

a) $\vec{a} = (0, -5, 4)$; b) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

3. Gjeji këndin ndërmjet vektorëve

a) $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ dhe $\vec{b} = (1, -2, 2)$; b) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ dhe $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$.

4. Janë dhënë pikat $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ dhe $C(2, 1, 2)$. Njehso këndin ndërmjet vektorëve $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$.

5. A janë reciprokisht normal vektorëte

a) $\vec{a} = (-5, 0, 9)$ dhe $\vec{b} = (1, 7, -2)$; b) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ dhe $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$?

7.12. Prodhimi vektorial i vektorëve

Përveç prodhimit skalar të vektorëve do ta përkufizojmë operacionin, të quajtur shumëzimin vektorial.

Koncepti i shumëzimit vektorial

Gjatë përkufizimit të shumëzimit vektorial do ta shfrytëzojmë konceptin **treshja e djathtë (e majtë) e vektorëve**. Tre vektorë për të cilët dihet cili prej tyre është i pari, cili është i dyti, kurse cili është i treti quhet **treshe e vektorëve**. Për shembull, te treshja e vektorëve $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ do të llogarisim se vektori $\vec{c}$ është i pari, vektori $\vec{b}$ është i dyti, kurse vektori $\vec{a}$ është i treti. Treshja e vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ të cilët nuk janë komplanar quhet **e djathtë (e majtë)** nëse vektorët $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ janë renditur sikurse gishti tregues, treguesi dhe gishti i mesëm të dorës së djathtë (majtë).

Prodhimi vektorial i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ quhet vektori $\vec{c}$ për të cilin vlen

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$,

b) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ dhe $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, përkatësisht vektori $\vec{c}$ është normal në vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$,

c) vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ formojnë treshe të djathtë të vektorëve.

Prodhimin vektorial të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ do ta shënojmë me $\vec{a} \times \vec{b}$. Të shënojmë se kushti nën a) e përcakton modulin e prodhimit vektorial, kushti b) drejtimin e tij, kurse kushti nën c) e përcakton kahen e tij.

Shembulli 1. Prodhimi vektorial i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, për të cilët $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ ka modulin

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 14\sqrt{3}.$$

Vetitë e prodhimit të vektorëve

Në vazhdim do të përmendim disa veti më të rëndësishme të prodhimit vektorial.

1. Për çdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ vlen

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{vetia antikomutative})$$

Vetia e sipërme e tregon se te shumëzimi vektorial të vektorëve është i rëndësishëm renditja e vektorëve të cilët e përbëjnë prodhimin.

2. Për çfarëdo dy vektor $\vec{a}, \vec{b} \in V$ dhe për çfarëdo numër real p vlen

$$p(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\vec{b}) \quad (\text{vetia asociative})$$

Sipas vetisë së shprehur, prodhimi vektorial shumëzohet me çfarëdo numër real kur do të shumëzohet cilito prej vektorëve me numrin e dhënë real.

3. Për çfarëdo tre vektorë $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ vlen

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{dhe} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (\text{vetia distributive})$$

Vetia e sipërme tregon se deri te vektori i njëjtë arrijmë, nëse dy vektor mbliidhen dhe pastaj në mënyrë vektoriale shumëzohen me vektor të tretë, ose nëse çdonjëri prej mbledhësve shumëzohet me vektorin e tretë dhe pastaj mbliidhen. Poashtu, është e rëndësishme renditja e shumëzuesve.

4. Për çdo vektor $\vec{a} \in V$ dhe për çdo numër real p vlen $\vec{a} \times (p\vec{a}) = \vec{0}$

Vetia bazohet në faktin se vektorët $\vec{a}$ dhe $p\vec{a}$ janë kolinear, përkatësisht $(\vec{a}, p\vec{a}) = 0$.

Detyra2. Njehso gjatësinë e prodhimit vektorial të vektorëve $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b}$ dhe $\vec{y} = \vec{a} + 2\vec{b}$, nëse $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

Zgjidhje. Kemi se

$$\vec{x} \times \vec{y} = (3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{b}) = 7(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Prandaj, kemi se

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |7(\vec{b} \times \vec{a})| = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 7 \cdot 4 \cdot 7 \sin \frac{\pi}{3} = 98\sqrt{3}.$$

Detyra

1. Gjeji modulën e prodhimit vektorial $\vec{a} \times \vec{b}$, nëse $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$ dhe $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

2. Gjeji vektorin $\vec{a} \times \vec{b}$, nëse $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$ dhe $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q} - 5\vec{r}$, ku $\vec{p}$, $\vec{q}$ dhe $\vec{r}$ është treshja e djathtë e vektorëve reciprokisht normal dhe njësi.

3. Njehso gjatësinë e prodhimit vektorial $\vec{m} \times \vec{n}$, nëse $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ dhe $\vec{n} = 3\vec{a} + \vec{b}$, ku $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

7.13. Zbatimi i prodhimit vektorial të vektorëve

Drejtëpërdrejt prej përkufizimit të prodhimit vektorial mund të realizojmë disa përfundime të rëndësishme të cilat gjejnë zbatim në detyrat gjeometrike.

Njehsimi i syprinës së paralelogramit

Zbatimi i prodhimit vektorial në zgjidhjen e detyrave gjeometrike bazohet në faktin se moduli i prodhimit vektorial të dy vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është i barabartë me syprinën e paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{OA} = \vec{a}$ dhe $\vec{OB} = \vec{b}$. Domethënë kemi se $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

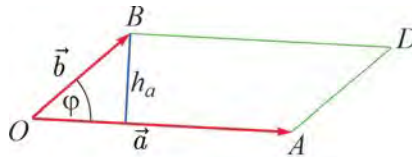


Figura 1

Me të vërtetë, nëse $OADB$ është paralelogram i konstruktuar mbi vektorët $OA = \vec{a}$ dhe $OB = \vec{b}$ (figura 1), atëherë syprina e tij është

$$S = |\vec{a}| \cdot h_a = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Shembulli 1. Për t'u njehsuar syprina S e paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$ dhe $\vec{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, ku $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, nis nga

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \sin(\vec{AB}, \vec{AD}).$$

Poashtu, kemi se

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) = 7(\vec{a} \times \vec{b})$$

Prej këtu kemi

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 98\sqrt{3}.$$

Njehsimi i syprinës së trekëndëshit

Prej gjeometrisë dihet se për syprinën e trekëndëshit S_T i konstruktuar mbi vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, dhe syprinës së paralelogramit të S_P të konstruktuar mbi vektorët vlen barazimi $S_T = \frac{1}{2} S_P$. Prej këtu kemi se

$$S_T = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Shembulli 2. Njehso syprinën e trekëndëshit ABC , të konstruktuar mbi vektorët $\vec{AB} = \vec{b} + 3\vec{a}$ dhe $\vec{AC} = \vec{a} - 2\vec{b}$, ku $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

$$\text{Kemi se } S_T = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Më tutje, gjejmë se $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\vec{b} + 3\vec{a}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = -6(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{a} \times \vec{b} = -7(\vec{a} \times \vec{b})$.

Prej këtu kemi se syprina e trekëndëshit ABC është

$$S_T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 21.$$

Kushti për vektorët kolinear të dy vektorëve

Prej përkufizimit të prodhimit vektorial vijon se prodhimi vektorial është vektori zero, nëse dhe vetëm nëse njëri prej vektorëve është vektor zero ose nëse vektorët janë kolinear. Prandaj, **kushti për kolinearitetin e dy vektorëve** është:

Dy vektor $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinear nëse dhe vetëm nëse $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Shembulli 3. Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ le të mos janë kolinear. Gjeje vlerën e parametrin λ për të cilin vektorët $\vec{c} = \lambda\vec{a} - \vec{b}$ dhe $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$ janë kolinear.

Për ta gjetur vlerën e parametrin λ gjendet prej kushtit për kolinearitet të vektorëve $\vec{c}$ dhe $\vec{d}$

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\lambda\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{0},$$

përkatesisht

$$\lambda\vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} + \lambda\vec{a} \times 3\vec{b} - \vec{b} \times 3\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + 3\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (1 + 3\lambda)(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Pasi vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ nuk janë kolinear, kemi $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Domethënë $1 + 3\lambda = 0$, përkatesisht $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Detyra

1. Njehso syprinën e trekëndëshit ABC , të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ku $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

2. Njehso syprinën e paralelogramit $ABCD$ të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{AB} = 3\vec{b} - \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, ku $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektorët njësi të cilët formojnë kënd prej 60° .

3. Njehso gjatësinë e lartësisë prej kulmit C të trekëndëshit ABC nëse $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p} - \vec{q}$ dhe $\overrightarrow{BC} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, ku vektorët $\vec{p}$ dhe $\vec{q}$ janë vektor njësi reciprokisht normal.

4. Vektorët $\vec{x}$ dhe $\vec{y}$ le të mos jenë kolinear. Për cilën vlerë të parametrin t vektorët $\vec{u} = 3t\vec{x} - \vec{y}$ dhe $\vec{v} = \vec{x} + 7\vec{y}$ janë kolinear.

7.14. Prodhimi vektorial në formën koordinative

Në këtë mësim do të njehsomë prodhim vektorial të vektorëve, syprina e paralelogramit të konstruktuar mbi dy vektor të dhënë, syprina e trekëndëshit të konstruktuar mbi dy vektor të dhënë dhe do ta realizojmë kushtin për kolinearitetin e dy vektorëve, në rastin kur vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre.

Njehsimi i prodhimit vektorial të vektorëve në formën koordinative

Prej përkufizimit të prodhimit vektorial për vektorët njësi koordinativ kemi se

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}. \end{array}$$

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ dhe } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

atëherë vlejné zbërthimet

$$\vec{a} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \text{ dhe } \vec{b} = (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

Për shkak të vetive të prodhimit vektorial dhe përkufizimit të determinantës të rendit të dytë kemi se

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Si pasojë prej diskutimit të sipërm, duke shfrytëzuar përkufizimin e determinantës së rendit të tretë (shiko njësinë modulare 8, njësia mësimore 8.2), prodhimin vektorial mund ta shkruajmë në formën

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Shembulli 1. T'i caktojmë koordinatat e prodhimit vektorial të vektorëve $\vec{a} = (0, -3, -1)$ dhe $\vec{b} = (4, 0, -5)$. Kemi se

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k} - (-12\vec{k} + 0\vec{i} + 0\vec{j}) = 15\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

prej ku kemi se $\vec{a} \times \vec{b} = (15, -4, 12)$.

Zbatimi i prodhimit vektorial në formën koordinative

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre, përkatësisht nëse

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ dhe } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

atëherë për syprinën e paralelogramit të përcaktuar me vektorët e dhënë është me

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Prandaj kemi se

$$S = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Shembulli 2. Ta caktojmë gjatësinë e lartësisë prej kulmit B të trekëndëshit ABC , për të cilin $\vec{AB} = (4, -5, 0)$ dhe $\vec{BC} = (-4, 9, -3)$.

Syprina S e trekëndëshit ABC është e barabartë me gjysmën prej syprinës të paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{BA}$ dhe kemi se $\vec{BC}$. Prandaj kemi

$$2S = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = |-15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}| = \sqrt{225 + 144 + 256} = 25.$$

Prej gjeometrisë elementare dihet se $2S = |\vec{AC}| |\vec{B_1B}|$, ku B_1 është rrëza e lëshuar prej kulmit B . Pasi $\vec{AB} + \vec{BC} = (0, 4, -3)$ kemi $2S = 5|\vec{B_1B}|$. Atëherë gjatësia e lartësisë së kërkuar është $|\vec{B_1B}| = 5$.

Nëse $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dhe $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ atëherë kushti për kolinearitet $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, është i plotësuar nëse dhe vetëm nëse çdo koordinatë e prodhimit vektorial është e barabartë me zero, përkatësisht nëse $a_y b_z = a_z b_y$, $a_z b_x = a_x b_z$, $a_x b_y = a_y b_x$, ose,

$$\frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \frac{a_z}{b_z} = \frac{a_x}{b_x}, \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

Gjatë supozimit, se nëse ndonjë koordinatë e njërit vektor është zero, për shembull $a_x = 0$, atëherë patjetër $b_x = 0$, dhe sipas përkufizimit $\frac{0}{0} = \frac{a_y}{b_y}$, $\frac{0}{0} = \frac{a_z}{b_z}$.

Prandaj, **kushti për kolinearitet të dy vektorëve** në formën koordinative është

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Shembulli 3. Për të shqyrtuar se vektorët $a = (2, -4, 6)$ dhe $b = (6, -12, 18)$ a janë kolinearë, formohen raportet $\frac{2}{6}$, $\frac{-4}{-12}$ dhe $\frac{6}{18}$. Prej

$$\frac{2}{6} = \frac{-4}{-12} = \frac{6}{18}$$

vijon se vektorët e dhënë janë kolinear.

Detyra

1. Gjeji paraqiten koordinative të prodhimit vektorial të vektorëve:

a) $\vec{a} = (0, 2, 0)$ dhe $\vec{b} = (-4, 1, 0)$ b) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ dhe $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

2. Janë dhënë vektorët: $\vec{a} = (3, -1, -2)$ dhe $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Gjeji koordinatat e vektorëve:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$; b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; c) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.

3. Gjeji sinusin e këndit ndërmjet vektorëve $\vec{a} = (4, -4, 2)$ dhe $\vec{b} = (10, 15, 18)$.

4. Njehso syprinën e paralelogramit $ABCD$ të konstruktuar mbi vektorët $\vec{AB} = (3, 2, 4)$ dhe $\vec{AD} = (0, 3, -1)$.

5. Njehso syprinën e trekëndëshit ABC të konstruktuar mbi vektorët $\vec{AB} = (2, -3, 1)$ dhe $\vec{AC} = (1, 2, -2)$.

6. Për cilat vlera të x dhe y , vektorët $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + y\vec{k}$ dhe $\vec{b} = 4\vec{i} + x\vec{j} + 8\vec{k}$ janë kolinear?

7.15. Prodhimi i përzier i vektorëve

Zgjidhja e shumë detyrave gjeometrike dukshëm janë për lehtësimin me futjen e prodhimit të përzier të tre vektorëve, të cilët ka interpretimi gjeometrik i rëndësishëm.

Koncepti për prodhimin e përzier të vektorëve

Prodhimi i përzier $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ i vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, është prodhimi skalar të vektorëve $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe shënohet me $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Shembulli 1. Për të njehsuar prodhimin e përzier të vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, të cilët janë reciprokisht normal, paraqesin treshe e djathtë e vektorëve dhe $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ dhe $|\vec{c}| = 6$, veprohet në këtë mënyrë:

Pasi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, formojnë treshe të djathtë të vektorëve, vektorët $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ kanë kahe të njëjtë, prandaj kemi

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = 120. \end{aligned}$$

Vetitë e prodhimit të përzier të vektorëve

Në vazhdim do të përmendim disa veti të prodhimit të përzier.

1. Për çdo vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, vlen

$$\text{a)} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

$$\text{b)} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$$

Vetia nën a) nënkupton se prodhimi i përzier nuk ndryshon gjatë zhvendosjes ciklike të vektorëve të prodhimi i përzier, kurse vetia nën b) nënkupton se prodhimi i përzier e ndryshon shenjën në të kundërt nëse çfarëdo dy vektor prej prodhimit të përzier i zëvendësojnë vendet.

Shembulli 2. Për vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, të atillë që $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ dhe $(\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ$ kemi se

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 3, \\ [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| \cos(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = \\ &= (|\vec{b}| |\vec{c}| \sin 90^\circ) |\vec{a}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$

2. Për çdo numër real k dhe çdo vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, vlen:

$$k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, k\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c}]$$

Vetia e sipërme tregon se prodhimi i përzier shumëzohet me numrin real kur do të shumëzohet cilido prej vektorëve të prodhimi i përzier me atë numër real.

Shembulli 3. Për vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, të atillë që $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, dhe numri real $k = 7$, kemi se

$$\begin{aligned} k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= k((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = k(|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})) = \\ &= k((|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ) = 7(2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1) = 140, \text{ dhe} \\ [k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= ((k\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = (|k\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(k\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})) = \\ &= (|k\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = (k |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 140. \end{aligned}$$

3. Për çdo vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dhe $\vec{d}$, vlen

$$\text{a)} [\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}];$$

$$\text{b)} [\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}];$$

$$\text{c)} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}].$$

Vetia e fundit nënkupton se ndonjë vektor të prodhimi i përzier është shumë prej dy vektorëve, atëherë prodhimi i përzier mund të paraqitet si shumë prej dy prodhimeve të përziara, të cilat të gjithë vektorët me përjashtim të shumës janë të njëjtë sikurse prodhimi i përzier, kurse të prodhimi i parë i përzier – mbledhës vektori përkatës është mbledhësi i parë dhe të prodhimi i dytë i përzier – mbledhësi i vektorit përkatës është mbledhësi i dytë.

Shembulli 4. Vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, janë komplanar dhe vektori $\vec{d}$ le të jetë normal në rrafshin e përcaktuar me vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, dhe le të jetë $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ dhe $(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Kemi se

$$\begin{aligned} [\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] &= ((\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} + (\vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + |\vec{d} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 90^\circ + (|\vec{d}| |\vec{b}| \sin 90^\circ) |\vec{c}| \cos 30^\circ = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} + (\vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + |\vec{d} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + \\ &+ (|\vec{d}| |\vec{b}| \sin(\vec{d}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

Detyra

1. a) Vërteto vetinë 1. b) Vërteto vetinë 3. c).

2. Njihso prodhimin e përzier $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, nëse vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, janë reciprokisht ortogonal dhe vektor njësi.

3. Njihso prodhimin e përzier $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, nëse vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, janë reciprokisht ortogonal dhe $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ dhe $|\vec{c}| = 7$.

4. Vektori $\vec{c}$ është normal në vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, të cilët formojnë kënd prej 60° . Njihso prodhimin e përzier $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, nëse $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ dhe $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

5. Janë dhënë tre vektorë njësi $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$. Vërteto se nëse $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b})) = \alpha$, atëherë $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

7.16. Zbatimi i prodhimit të përzier të vektorëve

Njehsimi i vëllimit të paralelopipedit

Zbatimi i prodhimit të përzier në detyrat gjeometrike bazohet kryesisht në interpretimin e tij gjeometrik. Përkatësisht, prodhimi i përzier i tre vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ sipas vlerës absolute është e barabartë me vëllimin e paralelopipedit të ndërtuar mbi vektorët $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ dhe $\vec{OC} = \vec{c}$. Poashtu, shenja e prodhimit të përzier është pozitiv nëse $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ është treshe e dhënë e vektorëve, kurse negativ nëse $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ është treshe e majtë e vektorëve. Domethënë se

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Me të vërtetë, le të jetë $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ treshe e djathtë e treshes së vektorëve. Ta konstruktojmë paralelopipedin mbi vektorët $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ dhe $\vec{OC} = \vec{c}$, dhe ta shënojmë me φ këndin ndërmjet vektorëve $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ (figura. 1). Atëherë prej përkufizimit për prodhim skalar kemi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi$.

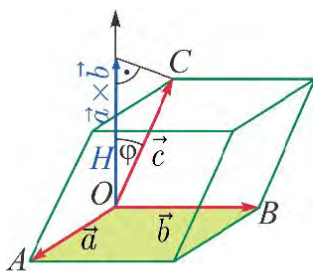


Figura 1

E dimë se gjatësia e prodhimit vektorial $\vec{a} \times \vec{b}$ është numerikisht i barabartë me syprinën B të paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{OA} = \vec{a}$ dhe $\vec{OB} = \vec{b}$, por ai tani është baza e konstruktuar mbi paralelopipedin. Nga ana tjetër, prodhimi $|\vec{c}| \cos \varphi$ sipas vlerës absolute është e barabartë me lartësinë H të lëshuar ndaj bazës së paralelopipedit. Prej këtu për vëllimin V të paralelopipedit kemi

$$V = B \cdot H = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Prandaj, shenja e prodhimit të përzier varet prej shenjës së shprehjes $\cos \varphi$, përkatësisht prej këndit ndërmjet vektorëve $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$. Poashtu $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ nëse dhe vetëm nëse $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, kurse $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ nëse dhe vetëm nëse $180^\circ > \varphi > 90^\circ$. Pasi vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ është normal në rrafshin R të cili shtrihen vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, mundemi të përfundojmë se $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ nëse dhe vetëm nëse vektorët $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë në anën e njëjtë të rrafshit R , kurse $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ nëse dhe vetëm nëse vektorët $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë në anë të ndryshme të rrafshit R . Prej këtu përfundojmë se

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \text{ nëse dhe vetëm nëse } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ është treshe e djathtë e vektorëve, dhe}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ nëse dhe vetëm nëse $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ është treshe e majtë e vektorëve.

Shembulli 1. Njehso vëllimin e paralelopipedit të përcaktuar me vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, të cilët kanë gjatësi të barabarta dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = 45^\circ$.

Pasi syprina e bazës B dhe lartësia H e paralelopipedit janë të barabarta me

$$B = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$H = |\vec{c}| \cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| \cos 45^\circ = \frac{|\vec{a}|}{2},$$

vëllimi i kërkuar është

$$V = B \cdot H = \frac{|\vec{a}|^3 \sqrt{2}}{4}.$$

Njehsimi i vëllimit të tetraedrit

Prej gjeometrisë dihet se për vëllimin e tetraedrit V_T të konstruktuar mbi vektorët a , b dhe c , dhe vëllimi i paralelopipedit V_P të konstruktuar mbi vektorët e njëjtë vlen $V_T = \frac{1}{6} V_P$. Prej këtij kemi

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Shembulli 2. Njehso vëllimin e tetraedrit të përcaktuar me vektorët njësi $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, nëse $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ dhe $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$.

Me njehsimin e drejtpërdrejt fitohet se

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = \\ &= \frac{1}{6} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{6} \left| \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}. \end{aligned}$$

Kushti për vektorët komplanar të tre vektorëve jozero

Duke pasur parasysh se prodhimi i përzier i tre vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ sipas vlerës absolute është e barabartë me vëllimin e paralelopipedit të konstruktuar mbi ato vektor jozero $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ është i barabartë me zero, përkatësisht $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, nëse dhe vetëm nëse të tre vektorët janë komplanar.

Prandaj, **kushti për komplaritet të tre vektorëve jozero** $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ është:

Vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë komplanarë nëse dhe vetëm nëse $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Shembulli 3. Të kontrollojmë a janë komplanarë vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, nëse $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ dhe $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$.

Kemi se

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

prej ku përfundojmë se vektorët e dhënë janë komplanar.

Detyra

1. Njehso vëllimin e paralelopipedit të përcaktuar me vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, nëse $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ dhe $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Njehso vëllimin e paralelopipedit kënddrejtë me tehe $a = 5$, $b = 4$ dhe $c = 6$.

3. Njehso vëllimin e tetraedrit të përcaktuar me vektorët $\vec{m}$, $\vec{n}$ dhe $\vec{p}$, nëse $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $|\vec{p}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$ dhe $(\vec{p}, \vec{m} \times \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4. A janë komplanarë vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, nëse $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ dhe $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$.

7.17. Prodhimi i përzier i vektorëve në formën koordinative

Në këtë mësim do të mësojmë se si njehsohet prodhimi i përzier të vektorëve, vëllimi i paralelopipedit, vëllimi i tetraedrit dhe do ta realizojmë kushtin për komplanaritet të tre vektorëve, në rastin kur vektorët janë dhënë me koordinatat e veta.

Njehsimi i prodhimit të përzier të vektorëve në formën koordinative

Ta njehsojmë prodhimin e përzier nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e veta, përkatësisht nëse

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{dhe} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Nga $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ fitojmë se

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Prandaj, prodhimi i përzier i vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$, janë dhënë me koordinatat e veta është

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Shembulli 1. Prodhimi i përzier i vektorëve $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -2)$ dhe $\vec{c} = (1, 2, 0)$ është

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 8 = -8.$$

Zbatimi i prodhimit të përzier të vektorëve në formën koordinative

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e veta, përkatësisht nëse

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{dhe} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

atëherë për vëllimin e paralelopipedit të përcaktuar me vektorët e dhënë është

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

Prandaj, kemi se

$$V = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

Shembulli 2. Vëllimi i paralelopipedit me vektorët $\vec{a} = (2, -2, 8)$, $\vec{b} = (3, -9, 3)$ dhe $\vec{c} = (18, 12, -30)$ është

$$V = \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 3 & -9 & 3 \\ 18 & 12 & -30 \end{vmatrix} \right| = 4104.$$

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e veta, përkatësisht nëse

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{dhe} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

atëherë për vëllimin e tetraedrit të përcaktuar me vektorët e dhënë është

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

Prandaj, kemi se

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Shembulli 3. Pikat $A(2, -4, 5)$, $B(-1, -3, 4)$, $C(5, 5, 1)$ dhe $D(1, 1, -2)$ janë kulmet e tetraedrit. Njehso lartësinë e tetraedrit të lëshuar prej kulmit D .

Lartësia e tetraedrit është e barabartë me lartësinë e paralelopipedit të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AD}$. Vëllimi i paralelopipedit është $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$, kurse syprina e bazës përkatëse është $B = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ (figura2).

Prandaj, kemi se

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$

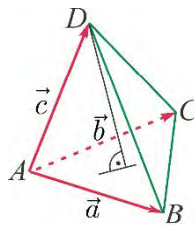


Figura 2

Pasi $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 9, -4)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 5, -7)$ kemi se

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = |189 + 4 - 15 - 9 - 60 + 21| = 130, \text{ dhe}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 27\vec{k} - 3\vec{k} + 9\vec{i} - 12\vec{j} = 5\vec{i} - 15\vec{j} - 30\vec{k}$$

prej ku gjejmë se

$$B = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-30)^2} = 5\sqrt{46}.$$

Kështu, kemi se

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{130}{5\sqrt{46}} = \frac{13\sqrt{46}}{23}.$$

Nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e veta, përkatësisht nëse

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \text{ dhe } \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

atëherë kushti për komplaritet të vektorëve $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ është

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Me të vërtetë, kemi se

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

nëse dhe vetëm nëse $c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$. Barazimi

i fundit është ekuivalent me barazimin

$$\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) (c_x, c_y, c_z) = 0$$

që do të thotë se $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Kjo do të thotë se vektorët $\vec{a} \times \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë reciprokisht normal, përkatësisht vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë komplanar.

Shembulli 4. Vlera e parametrit p për të cilët vektorët $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (p, 1, 0)$ dhe $\vec{c} = (1, 4, 8)$ janë komplanar mund të fitohet prej kushtit për komplaritet të tre vektorëve. Prej kushtit për komplaritet të vektorëve të dhënë kemi se

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Me zbërthimin e determinantës në anën e djathtë e fitojmë barazimin $28p + 7 = 0$. Me zgjidhjen e saj kemi se $p = -\frac{1}{4}$. Prandaj, vektorët e dhënë janë komplanar për $p = -\frac{1}{4}$.

Detyra

1. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = (1, 5, -1)$, $\vec{b} = (4, 0, -3)$ dhe $\vec{c} = (0, -3, 1)$. Njehso prodhimin e përzier $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

2. Njehso lartësinë e paralelepipedit të ndërtuar mbi vektorët

$$\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{dhe} \quad \vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

nëse baza e tij është paralelogram, mbi vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

3. Gjeji vëllimin e tetraedrit të përcaktuar me vektorët $\vec{a} = (0, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 7, -3)$ dhe $\vec{c} = (4, -2, -1)$.

4. Vektorët $\vec{a} = (3, 4, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, 2)$ dhe $\vec{c} = (3, 0, 1)$ a janë komplanar?

5. Gjeje vlerën e parametrin t për të cilin vektorët $\vec{a} = (t, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, t, -1)$ dhe $\vec{c} = (1, 1, t)$ janë komplanar.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ dhe $\vec{c} = -\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$. Gjeji vektor $\vec{d}$ ashtu që vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dhe $\vec{d}$ të formojnë katërkëndësh.

2. Është dhënë gjashtëkëndësh i rregullt $ABCDEF$. Shprehi vektorët $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$ dhe $\overrightarrow{EF}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

3. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$. Trego se

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = 0.$$

4. Te tetraedri $OABC$ janë dhënë tehet $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Me ndihmën e vektorëve të dhënë shprehi tehet e tjera të tetraedrit.

5. Segmenti AB është ndarë në pesë pjesë të barabarta ku e para prej pikëndarjeve ka koordinata $C(3, -5, 7)$ por e fundit $F(-2, 4, -8)$. Gjeji koordinatat e pikave të skajshme të segmentit të dhënë.

6. Cakto numrin k , për të cilin vlen $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + k$.

7. Gjeji vektorin $\vec{c}$ kolinear me vektorin $\vec{a} + \vec{b}$, nëse $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$ dhe $|\vec{b}| = 2$.

8. Gjeje këndin ndërmjet vektorëve $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$ dhe $\vec{y} = \vec{p} - \vec{q}$, nëse $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 3$.

9. Gjeji gjatësitë e diagonaleve të paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ të $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ nëse $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ dhe $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

10. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = (2, -3, 1)$ dhe $\vec{b} = (1, 2, -2)$. Gjeji prodhimin vektorial

a) $\vec{a} \times \vec{b}$; b) $\vec{b} \times \vec{a}$; c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a})$.

11. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ dhe $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Gjeji vektor $\vec{d}$ i cili i kënaq kushtet $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{d}$ dhe $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.

12. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ dhe $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$. Gjeji vektor $\vec{p}$ ashtu që $\vec{p} \cdot \vec{a} = 3$ dhe $\vec{p} \times \vec{b} = \vec{c}$.

13. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ dhe $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Gjeji koordinatat e vektorëve $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ dhe $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

14. Gjeji syprinën e paralelogramit $OABC$ dhe këndin ndërmjet vektorëve $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

15. Njehso syprinën e trekëndëshit ABC të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (-2, 3, -3)$ dhe $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (1, 3, -5)$.

16. Njehso syprinën e paralelogramit diagonalet e të cilit janë formuar me vektorët $\overrightarrow{AC} = \vec{a} = (3, 1, -2)$ dhe $\overrightarrow{BD} = \vec{b} = (1, -3, 4)$.

17. Janë dhënë vektorët $\vec{a} = (1, 2x, -3)$ dhe $\vec{b} = (2, x, -2x)$. Për cilat vlera të x vektorët e dhënë janë ndërmjet veti:

- a)** normal; **b)** paralel?

18. Për cilën vlerë të parametrin t vektorët $\vec{a} = (\log(t-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (t, -2, 5)$ dhe $\vec{c} = (0, -1, 3)$ janë komplanar?

19. Njehso vëllimin e paralelopipedit të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (2, 2, -1)$ dhe $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (3, -1, 0)$.

20. Njehso lartësinë e paralelopipedit të konstruktuar mbi vektorët $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (3, -2, 5)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (1, -1, 4)$ dhe $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (1, -3, 1)$, nëse baza e tij është paralelogram mbi vektorët $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

8. MATRICAT

8.1. Determinantët e rendit të dytë

Le të jenë a, b, c dhe d numra realë të dhënë dhe ad, bc janë prodhimet përkatëse.

Vlera e shprehjes $ad - bc$, të shënuar në mënyrë skematike $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ quhet **determinanta**

e rendit të dytë; domethënë $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Numrat a, b, c dhe d quhen **elementet e determinantës**. Ato janë të renditura në dy **rreshta** (horizontalisht) dhe në dy **kolona** (vertikalisht), kurse në formë kryqëzore formojnë dy **diagonale**. Rreshtin e parë e përbëjnë numrat a dhe b , kurse të dytin numrat c dhe d . Kolonën e parë e përbëjnë numrat a dhe c , por të dytin numrat b dhe d . Numrat a dhe d formojnë **diagonalen kryesore**, kurse numrat b dhe c e formojnë **diagonalen dytësore**.

Në pajtim me atë që u tha sipër mund të përfundojmë se determinanta e rendit të dytë është e barabartë me ndryshimin e prodhimeve të elementeve të diagonales kryesore dhe të diagonales së dytë.

Shembulli 1. Themi se vlera e determinantës është -23 , pasi

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23.$$

Determinantët e rendit të dytë i kanë këto veti:

1. Vlera e determinantës nuk ndryshon, nëse rreshtat merren për kolona, duke, ruajtur numrin rendor, domethënë do të thotë $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Shembulli 2. Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7$, është e barabartë me vlerën e determinantës të fituar me zëvendësimin e rreshtave me kolona

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7.$$

2. Determinantët me dy rreshta të barabartë (kolona) e ka vlerën zero, domethënë $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \left(\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \right)$.

Shembulli 3. Për vlerën e determinantës me dy rreshta të barabartë kemi

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 4 \cdot 7 = 28 - 28 = 0.$$

3. Me zëvendësimin e të dy rreshtave (kolonave), vlera e determinantës e ndryshon shenjë në të kundërt, domethënë $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \right)$.

Shembulli 4. Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 6 - 24 = -18$, ndërsa vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 24 - 6 = 18$.

4. Nëse elementet e një rreshti (kolone) janë të barabarta me zero, atëherë vlera e determinantës është e barabartë me zero; domethënë $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Shembulli 5. Për vlerën e determinantës elementet e të cilës te rreshti i parë janë të barabarta me zero kemi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \cdot 8 - 0 \cdot 2 = 0 - 0 = 0.$$

5. Vlera e determinantës shumëzohet me numër, kur me atë numër do të shumëzohen të gjithë elementet e një rreshti (kolonë); domethënë $k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}$ $\left(k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} \right)$.

Shembulli 6. Vlera e determinantës e shumëzuar me numrin 7 është

$$7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 7(1 \cdot 9 - 6 \cdot 3) = 7 \cdot (-9) = -63,$$

kurse vlera e determinantës të e cila të gjithë elementet e rreshti të parë janë të shumëzuar me 7 është $\begin{vmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = (7 \cdot 1) \cdot 9 - (7 \cdot 6) \cdot 3 = 63 - 126 = -63$.

6. Nëse elementet përkatëse prej të dy rreshtave (kolonave) janë proporcionale, vlera e determinantës është e barabartë me zero; domethënë $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$ $\left(\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0 \right)$.

Shembulli 7. Për vlerën e determinantës të e cila elementet prej të dy rreshtave janë proporcionale kemi

$$\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 8 \cdot 7 = 56 - 56 = 0.$$

7. Vlera e determinantës nuk ndryshon, nëse ndaj elementeve të një rreshti (kolone) i shtojmë përkatësisht elementet prej rreshtit tjetër (kolonës) të shumëzuar paraprakisht me

numër të njëjtë k ; domethënë $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} \right)$.

Çdonjëra veti prej sipër të determinantës të rendit të dytë, lehtë mund të kontrollohet me

me njehsimin e vlerës së çdo determinantë prej të dy anëve, përkatësisht barazimi. Për ilustrim do ta realizojmë vetinë 7.

$$D = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+kc)d - (b+kd)c =$$

$$= ad + kcd - bc - kdc = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = L$$

Detyra

1. Njehso vlerat e këtyre determinantëve:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$; ç) $\begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix}$.

2. Zgjidhi barazimet:

a) $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x^2 - x & x^2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Zgjidhi pabarazimet:

a) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 4x & 2 \end{vmatrix} > 5$; b) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8$; c) $\begin{vmatrix} 3x & x \\ 2x & -4 \end{vmatrix} > -14$.

8.2. Determinantët e rendit të tretë

Koncepti për determinantën e rendit të tretë

Le të jenë a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) numra realë të dhënë. Vlera e shprehjes

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

të shkruar në mënyrë skematike

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

quhet **determinantë e rendit të tretë**. Domethënë,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Numrat a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) quhen **elementet e determinantës**. Elementet janë renditur në **rreshta** (horizontal) dhe **tri kolona** (vertikale). Elementet a_1, b_2, c_3 e përbëjnë **diagonalen kryesore**, por a_3, b_2, c_1 e përbëjnë **diagonalja dytësore** e determinantës.

Te shprehja e paraqitur me determinantë të rendit të tretë, tre prej mbledhësve të parë paraqesin prodhime prej nga tre elemente, të cilët shtrihen te diagonalja kryesore (a_1, b_2, c_3) dhe te kulmet e trekëndëshave, bazat e të cilëve janë paralele me diagonalen kryesore (a_2, b_3, c_1) dhe (a_3, b_1, c_2) , (figura 1). Këta tre anëtarë prej barazimit që merren, paraqesin prodhime prej nga tre elementet, të cilët shtrihen te diagonalja dytësore (a_3, b_2, c_1) dhe te kulmet b_i, c_i e trekëndëshave me baza paralele me diagonalen dytësore (a_2, b_1, c_3) dhe (a_1, b_3, c_2) , (figura 2).

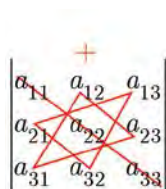


Figura 1

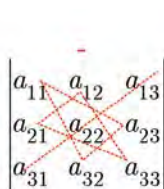


Figura 2

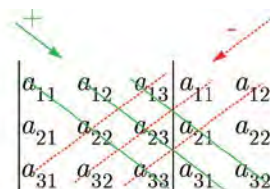


Figura 3

Për njehsimin e vlerës së determinantës së rendit të tretë e shfrytëzojmë të ashtuquajturën **rregullën e Sarusit**. Sipas kësaj rregulle, për ta njehsuar vlerën e determinantës, djathtas prej saj i shkruajmë kolonën e parë dhe të dytë, ku ato janë kolona e katërt dhe e pestë e skemës së re drejtkëndore. Pastaj prodhimet e elementeve (nga tre), që shtrihen te diagonalja kryesore dhe në të dy diagonalet paralele me atë i marrim me shenjë pozitive, kurse prodhimi i elementeve (nga tre) që shtrihen te diagonalja dytësore dhe në të dy diagonalet paralele me atë i marrim me shenjë negative dhe këto gjashtë prodhime i mbledhim (figura 3).

Shembulli 1. Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ është

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 = 39.$$

Zbërthimi i determinantës sipas elementeve të rreshtit të dhënë (kolona)

Elementet e determinantës të cilat janë çfarëdo numra realë të dhënë (numra të përgjithshëm) ndonjëherë është më e përshtatshme të shkruhen me një shkronjë, duke venduar te ajo indeksa që do të na tregojnë numrin rendor të rreshtit dhe numrin rendor të kolonës të cilëve u takon elementi i dhënë. Me marrëveshje, indeksi i parë gjithmonë do ta paraqet numrin rendor të rreshtit, kurse indeksi i dytë – numrin rendor të kolonës. Kështu, për shembull, për $i = 1, 2, 3$, rreshtit të tretë $j = 1, 2, 3$ a_{ij} është element prej rreshtit i dhe kolona j e determinantës nga rreshti i tretë

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Këtë determinantë do ta llogarisim për determinantë të dhënë përgjithshme të rendit të tretë dhe shkurtimisht do ta shënojmë me D . Për këtë do të fusim dy koncepte të reja të cilat lehtësohen të gjitha determinantët e rendit të tretë. Ato janë konceptet **minor** dhe **komplement algjebrik** përkatësisht të elementit të dhënë të determinantës.

Për çfarëdo zgjedhje të i, j ($1 \leq i, j \leq 3$), nëse e nëvizojmë rreshtin i dhe kolonën j të determinantës të rendit të tretë, elementet e tjera formojnë determinantë të rendit të dytë Δ_{ij} , e cila quhet **minor** i elementit a_{ij} .

Shembulli 2. Pasi çdo element ka minorin e vet, mund të përfundojmë se një determinantë e rendit të tretë ka nëntë minora të ndryshëm. Ja tre prej tyre të cilët u përgjigjen elementeve a_{12} , a_{23} , a_{31} , përkatësisht:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Komplementi algjebrik i elementit a_{ij} të determinantës së rendit të tretë quhet numri $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, ku Δ_{ij} është minor i elementit a_{ij} .

Shembulli 3. Komplementet algjebrike të elementeve a_{31} dhe a_{23} janë përkatësisht:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \Delta_{31} = \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \Delta_{23} = -\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Vlera e determinantës të rendit të tretë mund të fitohet me ndihmën e elementeve të një rreshti (kolone) dhe me atë numër përkatës, përkatësisht me **zbërthimin e determinantës** sipas elementeve të rreshtit të zgjedhur (kolona). Përkatësisht, vlera e determinantës të rendit të tretë është e barabartë me shumën e prodhimeve të elementeve të çfarëdo rreshti i (kolone j) e shumëzuar me komplementet e tyre algjebrike përkatëse

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} \quad 1 \leq j \leq 3).$$

Shembulli 4. Ta zbërthejmë sipas rreshtit të dytë ($i = 2$). Kemi

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = \\ &= a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) = \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \end{aligned}$$

Shembulli 5. Ta njehsojmë determinantën $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$

Me zbërthimin e elementeve të rreshtit të parë kemi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9.$$

Zbërthim i i determinantës është e dobishme të kryhet sipas atij rreshti ose kolone që përmban elemente zero.

Shembulli 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 8 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = 8(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 56.$

Determinanta e formës $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ quhet **lartë trekëndore**, kurse determinanta

e formës $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ quhet **poshtë trekëndore**.

Lehtë kontrollohet se $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$

Shembulli 7. Determinanta $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ është lartë trekëndore, kurse determinanta

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 7 & -21 & -5 \end{vmatrix}$ është poshtë trekëndore.

Detyra

1. Njehso vlerat e determinantëve:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix};$ c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix};$ ç) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

2. Zgjidhi barazimet sipas të panjohurës x :

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0;$ c) $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3. Njehso vlerat e determinantëve:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix};$$

ku x, y, a, b janë çfarëdo numra realë të dhënë.

4. Njihso determinantët me zbërthim të elementeve të ndonjërit prej rreshtave:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

5. Njihso determinantët me zbërthim sipas elementeve të ndonjëres prej kolonave:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};$$

ku x, y, z janë çfarëdo numra realë të dhënë.

8.3. Vetitë e determinantëve të rendit të tretë

Në këtë mësim do të përmendim ndonjë veti të determinantëve të rendit të tretë.

1. Determinanta nuk e ndryshon vlerën, nëse rreshtat zëvendësohen me kolonat, duke

ruajtur numrin rendor; domethënë

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Me të vërtetë, ta shënojmë me Δ determinantën e anës së majtë të barazimit, kurse me $\bar{\Delta}$ determinantën prej anës së djathtë të barazimit. Nëse determinantën Δ e zbërthejmë sipas rreshtit të parë, kurse $\bar{\Delta}$ – sipas elementeve të kolonës së parë, kemi

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ dhe } \bar{\Delta} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

prej ku vijon $\Delta = \bar{\Delta}$.

Shembulli 1. Vlera e determinantës

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -319 \text{ është e barabartë me vlerën}$$

e determinantës të fituar me zëvendësimin e rreshtit të parë me kolonën e parë

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -319.$$

2. Gjatë zëvendësimit të vendeve të dy rreshtave (kolonave), vlera e determinantës e ndryshon shenjën në të kundërt.

Nëse $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, atëherë $\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$ është figurë determinanta Δ me

zëvendësimin e vendeve të kolonës së parë dhe të tretë. Duke zbërthyer determinantën $\bar{\Delta}$ sipas elementet e kolonës së parë, kemi

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \\ &= -a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Duke e zbërthye tani determinantën Δ sipas elementeve të kolonës së tretë, kemi

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \text{ Domethënë, } \bar{\Delta} = -\Delta.$$

Shembulli 2. Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 134$, kurse vlera e determinantës

e fituar me zëvendësimin e vendeve të rreshtit të parë me të rreshtin e dytë është

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -134.$$

3. Determinanta me dy rreshta (kolona) të barabarta e ka vlerën zero.

Me të vërtetë, nëse te determinanta Δ të dy rreshtat e barabartë i zëvendësojnë vendet, vlera e determinantës ngel e njëjtë, kurse sipas vetisë 2, vlera e determinantës patjetër ta ndryshon shenjën në të kundërt. Prandaj, patjetër të jetë $\Delta = -\Delta$, ose $2 \cdot \Delta = 0$. Prej këtui $\Delta = 0$.

Shembulli 3. Për vlerën e determinantës me dy kolona të barabarta kemi

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 9 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Nëse të gjitha elementet e një rreshti (kolone) janë zero, atëherë vlera e determinantës është zero.

Me të vërtetë, me zbërthimin e determinantës Δ sipas rreshtit (kolonës), te e cila të gjitha elementet janë zero, kemi $\Delta = 0$.

Shembulli 4. Për vlerën e determinantës elemente e të cilës të rreshtit të tretë janë të

barabarta me zero kemi $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

5. Determinanta shumëzohet me numër kur me atë numër do të shumëzohen të gjitha elementet e një rreshti (kolone të njëjtë).

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Me të vërtetë, me zbërthimin e determinantës Δ sipas elementeve të kolonës së parë kemi

$$\Delta = ka_{11}A_{11} + ka_{21}A_{21} + ka_{31}A_{31} = k(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}).$$

Shembulli 5. Vlera e determinantës e shumëzuar me numrin 3 është

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 8 & 7 & 9 \\ -4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -1281, \text{ kurse vlera e determinantës të cila të gjithë elementet e}$$

$$\text{kolona tretë e shumëzuar me numrin 3 është} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 8 & 7 & 27 \\ -4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -1281.$$

6. Nëse elementet përkatëse të dy rreshtave (kolonave) janë proporcionale, atëherë vlera e determinantës është e barabartë me zero.

$$\text{Nëse supozojmë se } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} \text{ atëherë duke filluar së pari të vetisë 5,}$$

por pastaj vetisë 3, kemi

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Shembulli 6. Për vlerën e determinantës të e cila elementet prej dy kolonave të para

$$\text{janë proporcionale kemi} \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Nëse çdo element i ndonjë rreshti (kolone) të determinantës Δ është shumë prej n mbledhësve, atëherë Δ mund të paraqitet si shumë $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ prej n determinantëve, ku të gjitha elementet me përjashtim të elementeve prej rreshtave (kolonave) janë të njëjta sikurse Δ . Te determinanta e parë – mbledhësi Δ_1 rreshti (kolone) përbëhet prej mbledhësve të parë, të e dyta përbëhet prej të dytave, etj., edhe të n përbëhet prej n – mbledhësve.

Për t'u konstatuar barazimi

$$\begin{vmatrix} a_1 + s_1 + p_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + s_2 + p_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + s_3 + p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

është e mjaftueshme determinanta fillestare ta zbërthejmë sipas kolonës së parë.

Shembulli 7. Elementet e kolonës së parë të determinantës

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

përkatësisht, janë shuma prej elementeve përkatëse të kolonave të para të determinantëve

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} \text{ dhe } \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -2 & -11 & 2 \end{vmatrix}, \text{ përkatësisht vlen barazimi}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -2 & -11 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Nëse ndaj elementeve të një rreshti (kolona) e determinanta shtohen elementet përkatëse të rreshtit (kolonës) të dytë paraprakisht i shumëzuar me një numër të njëjtë k , atëherë nuk ndryshon vlera e determinantës.

Me shfrytëzimin e njëpasnjëshme të vetisë 7, të vetisë 5 dhe të vetisë 3, kemi

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Shembulli 8. Vlera e determinantës

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 31, \text{ kurse vlera e determinantës e}$$

fituar me shumëzimin e kolonës së parë me numrin 4 dhe shtuarjen e kolonës së tretë

është

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 4 & 8 & 25 \\ -5 & -11 & -18 \end{vmatrix} = 31.$$

9. Nëse elementet e një rreshti (kolone) të determinantës janë kombinime lineare të elementeve përkatëse të dy rreshtave (kolonave) tjera, atëherë vlera e determinantës është e barabartë me zero.

Me zbatimin e vetisë 7 dhe të vetisë 6, kemi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} + ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} + ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} + ya_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ya_{32} \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Shembulli 9. Elementet te kolona e tretë te determinanta nisëse janë shumat prej elementeve përkatëse të kolona e parë dhe e dytë, pra kemi se

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ -5 & -11 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3+6 \\ 4 & 8 & 4+8 \\ -5 & -11 & -5-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ -5 & -11 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -11 & -11 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

10. Shuma e prodhimeve të elementeve të çfarëdo rreshti (kolona) me komplementet algjebrike përkatëse të elementeve prej rreshtit (kolona) tjetër është e barabartë me zero.

Për këtë veti, elementet e kolonës së tretë do t'i shumëzojmë përkatësisht me komplementet algjebrike të elementeve prej kolonës së parë t'i shumëzojmë përkatësisht do të tregojmë se vlen barazimi

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0.$$

Pasi komplementet algjebrike të elementeve prej kolonës së parë formohen pa përdorimin e elementeve prej asaj kolone, për çfarëdo numra x, y, z vlen barazimi

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{11} + yA_{21} + zA_{31}.$$

Në veçanti për $x = a_{13}, y = a_{23}, z = a_{33}$, fitojmë se

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Shembulli 10. Nëse elementet e kolonës së tretë të determinantës

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \text{ i}$$

shumëzojmë me komplementet algjebrike të kolonës së parë kemi se

$$(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Detyra

1. Duke shfrytëzuar vetitë e determinantës prej rreshtit të tretë, gjeji vlerat e këtyre determinantëve

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Duke i shfrytëzuar vetitë e determinantës, këto determinanta sjelli deri te forma lartë trekëndore, kurse pastaj njehso vlerat e tyre:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Zgjidhi barazimet te e panjohura x me shfrytëzimin e vetive të determinantëve:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Duke i shfrytëzuar vetitë e determinantës të rendit të tretë, vërtetoi këto identitete.

$$4. \begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$$

$$6. \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2.$$

8.4. Sistem prej barazimeve lineare me tre të panjohura

Determinantët e rendit të tretë, në mënyrë analoge determinantët e rendit të dytë, mund t'i shfrytëzojmë për zgjidhjen e sistemeve prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura.

Le të jetë dhënë sistemi i përgjithshëm prej tre barazimeve me të panjohura, x , y , z , të cilin koeficientët e sistemit prej shkaqeve praktike janë shënuar me shkronjat e njëjta dhe indeksa, a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, kurse anëtarët e lirë me b_i , $i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Koeficientët para x , y dhe z e formojnë **determinantën e sistemit**, të shënuar me Δ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kurse determinantët e

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

quhet **determinantët e të panjohurave** x , y dhe z , përkatësisht.

Të zgjidhet sistemi do të thotë të gjenden vlerat e të panjohurave, nëse ekzistojnë, që i kënaqin të tre barazimet e sistemit dhe paraqesin zgjidhje të vet ose të konstatohet kundërthënia e sistemit.

Nëse sistemi (1) është **johomogjen**, përkatësisht nëse të paktën njërin prej anëtarëve të lirë b_i , $i = 1, 2, 3$, nuk është zero, atëherë të mundshme janë këto raste.

Rasti I. Nëse $\Delta \neq 0$, atëherë sistemi (1) ka zgjidhje të vetme

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Formulat e sipërme quhen **format e Kramerit**, kurse zgjidhja e fituar me zbatimin e këtyre formulave thuhet se është fituar me rregullën e Kramerit.

Shembulli 1. Sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} -2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$$

ka zgjidhje të vetme pasi $\Delta = 4 \neq 0$. Kemi se $\Delta_x = 4$, $\Delta_y = 4$ dhe $\Delta_z = 0$, prej këtu fitojmë

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0.$$

Rasti II. Le të jetë $\Delta = 0$. Të mundshme janë këto raste:

II₁. Nëse të paktën njëri prej dermantëve Δ_x , Δ_y , Δ_z është e ndryshme prej zero, atëherë sistemi (1) është kundërthënës.

Shembulli 2. Sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

është kundërthënës pasi $\Delta = 0$, por $\Delta_x = 1 \neq 0$.

II₂. Nëse $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, atëherë sistemi i barazimeve (1) ka ose shumë pafund zgjidhje ose është kundërthënës.

Shembulli 3. Për sistemin

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2x + 6y + 2z = 4 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$$

kemi se $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, që do të thotë se ai ka shumë zgjidhje të pafundshme ose është kundërthënës. Duke vërejtur se sistemi mund të shkruhet sikurse

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2(x + 3y + z) = 2 \cdot 2 \\ 3(x + 3y + z) = 2 \cdot 3 \end{cases}$$

kemi se zgjidhjet e sistemit janë zgjidhje të barazimit $x + 3y + z = 2$ që ka pafund shumë zgjidhje; treshja $x, y, z = 2 - x - 3y$ është zgjidhje e përgjithshme është çfarëdo numra realë të zgjedhur x, y .

Shembulli 4. Për sistemin

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 6x - 3y + 3z = 6 \\ 8x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

kemi se $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, që do të thotë se ka shumë zgjidhje të pafundshme ose

është kundërthënës. Sistemi është ekuivalent me sistemin
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3(2x - y + z) = 3 \cdot 2, \\ 4(2x - y + z) = 4 \cdot 1 \end{cases} \quad \text{që është,}$$

ekuivalent me sistemin
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2. \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$
 Sistemi i fundit qartë është kundërthënës, që do të

thotë se edhe sistem i i dhënë është kundërthënës.

Nëse sistemi (1) është **homogjen**, përkatësisht nëse të gjithë anëtarët e lirë $b_i, i = 1, 2, 3$, janë të barabartë me zero, atëherë qartë është se gjithmonë ka **zgjidhje zero** ose **triviale** $x = 0, y = 0, z = 0$. Sistemi ka zgjidhje jotriviale nëse dhe vetëm nëse determinanta e sistemit është e barabartë me zero, përkatësisht $\Delta = 0$.

Shembulli 5. Sistemi i barazimeve lineare
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$
 nuk ka zgjidhje jozero

pasi $\Delta = 2 \neq 0$.

Shembulli 6. Sistemi i barazimeve lineare
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
 ka pafund shumë

zgjidhje pasi $\Delta = 0$. Për t'i gjetur zgjidhjet jozero veprojmë në këtë mënyrë: Prej barazimit të dytë sistemi fitohet $z = -2x - y$ dhe me zëvendësimin e z me shprehjen $-2x - y$ barazimi i parë dhe i tretë sillen në barazime $2x + y = 0$ dhe $-2x - y = 0$. Prej këtu për çfarëdo numër real të zgjedhur t treshja $x = t, y = -2t, z = 0$ paraqet zgjidhje të sistemit.

Shembulli 7. Varësisht prej parametrin m ta diskutojmë zgjidhjen e sistemit të barazimeve:
$$\begin{cases} x - my + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 2mx - y + z = 11. \end{cases}$$

Kemi se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2m^2 - 2 - 6m - 1 + 2m = 2m^2 - 4m = 2m(m - 2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -m & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 11m - 3 - 33 - 4 + 3m = 14m - 28 = 14(m - 2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2m & 11 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8m + 22 - 6m + 11 - 8 = -14m + 28 = 14(2 - m)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2m & -1 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 6m^2 - 8 - 24m + 3 + 22m = -6m^2 - 2m + 28 =$$

$$= -6(m-2)(m + \frac{7}{3})$$

Diskutimi i zgjidhjeve varësisht prej parametrit m :

1⁰ Për $m \neq 0$ dhe $m \neq 2$, $\Delta \neq 0$ dhe sistemi ka zgjidhje të vetme:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14(m-2)}{2m(m-2)} = \frac{7}{m}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14(2-m)}{2m(m-2)} = \frac{-7}{m};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6(m-2)(m + \frac{7}{3})}{2m(m-2)} = -3 - \frac{7}{m}$$

2⁰ Për $m = 2$, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Duke e shumëzuar barazimin e parë me 2 dhe duke shtuar te barazimi i dytë fitohet barazimi i tretë. Prandaj, sistemi ka shumë zgjidhje të pafundshme. Zgjidhja e përgjithshme mund të gjendet prej dy barazimeve të para:

$$x - 2y + z = 4$$

$$2x + 3y - z = 3$$

dhe ai është $(x, 7-3x, 18-7x)$.

3⁰ Për $m = 0$, $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, pra sistemi nuk ka zgjidhje

Detyra

1. Zgjidhe sistemin e barazimeve:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6 \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x - 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

2. Kontrolllo se sistemi i barazimeve lineare $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$ për çdo vlerë të

parametri a ka zgjidhje të vetme. Gjeje atë zgjidhje.

3. Gjeji të gjitha zgjidhjet e sistemit të barazimeve lineare homogjene:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x + 7y + 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 7y - z = 0 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

4. Kontrolllo se për çfarëdo vlera të parametrave a , b dhe c , sistemi

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ -bx - cy = 0 \end{cases} \quad \text{ka pafund shumë zgjidhje.}$$

5. Vërteto se sistemi i barazimeve lineare $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$ për çfarëdo vlere të

parametri a ka zgjidhje të vetme. Gjeje atë zgjidhje.

6. Shqyrto për cilat vlere të parametrit a sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} 2x + ay - z = 8 \\ ax + 2y + z = 20 \\ x + y - 2z = -5 \end{cases}$$

- a) ka pafund shumë zgjidhje;
b) është kundërthënëse; c) ka zgjidhje të vetme.

8.5. Koncepti për matricë

Në ekonomi shpesh analiza e llojeve të ndryshme të të dhënave kërkon paraqitjen e tyre me tabelë. Për shembull, firma ndërtimore e cila ndërton tre lloje të shtëpive, me ndihmën e tabelës e ka paraqitur numrin e njësive prej çdo lloji të materialit të nevojshëm për ndërtimin e tyre.

	Shtëpi për banim	Shtëpizë vikendi në det	Shtëpizë vikendi në mal
Dru	20	12	36
Hekur	56	66	14
Çimento	68	84	24
Gur	15	70	40

Numrat prej tabelës mundemi t'i shkrjuajmë në formë të skemës drejtkëndore

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 36 \\ 56 & 66 & 14 \\ 68 & 84 & 24 \\ 15 & 70 & 40 \end{bmatrix}$$

cila në mënyrë të thjeshtë i jep të gjitha informatat që i përmban tabela e sipërme. Të menduarit e kështillë jep motivim për futjen dhe shqyrtimin e konceptit matricë.

Skema drejtkëndore e formës

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ku $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, quhet **matricë**, dhe shënohet me

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Le të jetë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ është dhënë matrica m – horizontale n – çift rrotullues

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

quhen **rreshta** të matricës, kurse n – vertikale m – çift rrotullues

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

quhen **kolona** të matricës. Numrat a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, quhen **elemente**

të matricës. Elementi a_{ij} quhet ij –elemente dhe gjenden në prerjen e rreshtit i – dhe kolona j –. Matrica me m rreshta dhe n kolona quhet $m \times n$ matricë ose matrica e rendit $m \times n$.

Shembulli 1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ është matricë e rendit 3×4 ,

pasi tre rreshta dhe katër kolona. Më saktë, të tri katërshtet prej numrave të ndryshëm $(4, 1, -6, 0)$, $(9, 0, 7, 10)$ dhe $(6, 8, -2, 5)$, i për rreshtin e parë, të dytë, përkatësisht të matricës A , kurse katër treshet vertikale prej numrave real $(4, 9, 6)$, $(1, 0, 8)$, $(-6, 7, -2)$ dhe $(0, 10, 5)$, i përbëjnë, kolonën e dytë, të tretë dhe të katërt, përkatësisht, të matricës A . Përveç kësaj, për shembull $a_{23} = 7$, përkatësisht elementi 7 gjendet te prerja e rreshtit të dytë dhe kolonës së tretë. Ngjashëm $a_{11} = 4$, $a_{14} = 0$, $a_{33} = -2$ etj.

Për dy $m \times n$ matrica të rendit të njëjtë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ themi se janë të barabarta, nëse $a_{ij} = b_{ij}$, për $i = 1, 2, \dots, m$ dhe $j = 1, 2, \dots, n$.

Shembulli 2. Matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ nuk janë të barabarta

pasi A është 2×3 matricë, kurse B është 3×2 matrica.

Shembulli 3. Matricat $A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ janë të barabarta nëse $x = 3$, $y = 1$, $z = 5$ dhe $t = 4$.

A le të jetë $m \times n$ matrica. **Matrica e transportuar** A^t e A është $n \times m$ matrica te e cila rreshtat e A paraqesin kolona të A^t , por kolonat e A paraqesin rreshta të A^t , përkatësisht. Me tjera fjalë, nëse $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $A^t = [a^t_{ij}]$, atëherë $a^t_{ij} = a_{ji}$. Përkatësisht,

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Shembulli 4. E transponuar 3×2 matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, është 2×3

matrica $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Matrica A quhet **katrore**, nëse numri i rreshtave është i barabartë me numrin e kolonave. Nëse numri i kolonave, përkatësisht rreshtave është n , themi se A është matricë katrore e rendit n ose n – matrica katrore. Elementet $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ e përbëjnë diagonalen kryesore.

Shembulli 5. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ është matricë katrore të rendit 3 me

elementet e diagonales 1, 2, 3.

Matrica katrore të e cila të gjithë elementet që nuk janë te diagonalja kryesore janë të barabarta me zero, quhet **diagonalja e matricës**, domethënë

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Matrica diagonale quhet **skalare** nëse $d_1 = d_2 = \dots = d_n$.

Nëse të gjitha elementet mbi diagonalen kryesore janë të barabarta me 0, matrica katrore quhet **poshtë trekëndore**, domethënë

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

dhe në mënyrë analoge nëse të gjithë elementet nën diagonalen kryesore janë të barabarta me zero, quhet **lartë trekëndore**, domethënë

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nëse për elementet e matricës katrore vlen $a_{ij} = a_{ji}$ për çfarëdo $i, j = 1, \dots, n$, atëherë matrica quhet **simetrike**. Kështu për shembull, është simetrike matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 19 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 67 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 15 \end{bmatrix}.$$

Matrica njësi e rendit n është matrica diagonale e të cilës janë të barabarta me 1 dhe të gjithë elementet tjerë janë të barabarta me zero, shënohet me

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Shembulli 6. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ etj.

Për çdo matricë katrore A të rendit n është e saktë se $AI_n = I_n A = A$.

Detyra

1. Është dhënë matrica $A = \begin{bmatrix} 41 & 1 & 16 & 0 \\ 9 & 30 & -9 & 10 \\ 62 & 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

a) I cilit rend është matrica A ?

b) Shkruaj rreshtin e parë dhe kolonën e tretë të matricës A ;

c) Shkruaj elementet a_{13} , a_{24} , a_{33} , a_{32} , a_{14} dhe a_{21} të matricës A .

2. Janë dhënë matricat e barabarta:

a) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dhe $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dhe $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Sqaroje përgjigjen!

3. Për cilat vlera të parametrave a , b , c dhe d , janë të barabarta matricat

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c-d \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} c-d & 2d & 1 \\ -a-b & c-a & a \end{bmatrix}?$$

4. Shkruaje matricën e transponuar të matricës $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Është dhënë matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & 12 & -4 \end{bmatrix}$.

a) I cilit rend është matrica A ?

b) Shkruaj elementet e diagonaleve të matricës.

6. Fabrika për lëngje që prodhon katër lloje të lëngjeve dhe i kanë shitur në pesë qytete. Shqyrto shitjen

- qyteti i parë sipas llojeve të lëngjeve: 40, 60, 20 dhe 30 mijë shishe;
- qyteti i dytë sipas llojeve të lëngjeve: 50, 50, 15 dhe 35 mijë shishe;

- qyteti i dytë sipas llojeve të lëngjeve: 40, 45, 25 dhe 40 mijë shishe;
- qyteti i dytë sipas llojeve të lëngjeve: 30, 20, 10 dhe 20 mijë shishe;
- qyteti i dytë sipas llojeve të lëngjeve: 35, 40, 15 dhe 25 mijë shishe.

Shkruaj rezultatet e fituara me ndihmën e matricës.

7. Tre të patundshmëri k_1, k_2 dhe k_3 mund të jenë të blera prej katër firmave A_1, A_2, A_3 dhe A_4 .

a) Formo 4×3 matricë $B = [b_{ij}]$ ku b_{ij} pranon vlerë 1 nëse kapitali për investime të firmës A_i është më e madhe se çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_j , pranon vlerë 0 nëse kapitali për investim të firmës A_i është sa çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_j , pranon vlerë -1 nëse kapitali për investim të firmës A_i është më e vogël se çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_j .

b) Formo 3×4 matricë $C = [c_{ij}]$, ku c_{ij} pranon vlerë 1 nëse çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_i është më e vogël se kapitali për investim të firmës A_j , pranon vlerë 0 nëse çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_i është sa kapitali për investim të firmës A_j , pranon vlerë -1 nëse çmimi i kushtimit të patundshmërisë k_i është më e madhe se kapitali për investim të firmës A_j .

c) A janë të barabarta B dhe C ?

8.6. Mbledhja dhe zbritja e matricave. Shumëzimi i matricës me numër

Me paraqitjen e të dhënave në formë të matricës mund t'i analizojmë dhe të sjellim vendime afariste me përkufizimin e operacioneve me matrica.

Le të jenë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ $m \times n$ matrica. **Shuma** $A + B$ të matricave A dhe B është matrica $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ku $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, për $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, dhe shkruajmë $C = A + B$.

Me tjera fjalë, matrica C është e rendit të njëjtë sikurse matricat A dhe B , kurse elementet e saja janë shumatat e elementeve përkatëse të matricave A dhe B . Të vërejmë se operacioni mbledhje e matricave është përkufizuar vetëm për matrica të rendit të njëjtë.

Shembulli 1. Cakto shumën e matricave $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Sipas përkufizimit

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3-2 & 4-3 \\ 5+0 & 2-1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Shembulli 2. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ i tregon çmimet e blerjes dhe të shitjes (sipas rreshtave) të tri mallrave të ndryshme në një shoqëri tregtare (sipas kolonave).

Nëse çmimi i blerjes së çdo malli zmadhohet për 0,5 denarë, kurse çmimi zmadhohet për 0,2 denarë atëherë matrica $B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$ e tregon zmadhimin e çmimit të blerjes dhe çmimin e shitjes të çdo malli. Matrica

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0,5 & 3+0,5 & 2+0,5 \\ 4+0,2 & 6+0,2 & 7+0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 3,5 & 2,5 \\ 4,2 & 6,2 & 7,2 \end{bmatrix}$$

i tregon çmimet e reja dhe çmimet e shitjes të tri mallrave të ndryshme në shoqërinë tregtare.

Le të jetë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe k numër real. **Prodhiimi** i numrit real k me matricën A është matrica $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ku $b_{ij} = ka_{ij}$, për $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, dhe shkruajmë $B = kA$.

Me tjera fjalë, matrica shumëzohet me numër real ashtu që çdo element i saj shumëzohet me numrin real.

Matricën $(-1)A$ e shënojmë me $-A$, përkatësisht $(-1)A = -A$.

Shembulli 3. Le të jetë $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Cakto matricat $2A$ dhe $-3A$.

$$\begin{aligned} \text{Kemi } 2A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ dhe} \\ -3A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 3 & (-3) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le të jenë A dhe B dy $m \times n$ matrica. Do të përkufizojmë operacion **zbritje të matricave** me barazimin $A - B = A + (-B)$. Me tjera fjalë, nëse $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ atëherë ndryshimi $A - B$ i matricës A me matricën B është matrica $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ashtu që $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, për $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Të vërejmë se operacioni zbritje të matricave është përkufizuar vetëm për matrica të rendit të njëjtë.

Shembulli 4. Nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, atëherë

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Shembulli 5. Me matricën $A = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 700 & 500 & 800 \end{bmatrix}$ është treguar madhësia e

prodhimit në sezonin veror dhe dimëror (sipas rreshtave) të këpucëve për meshkuj, femra dhe fëmijësh (sipas kolonave) të një fabrike për këpucë gjatë vitit 2009. Me

matricën $B = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 500 \\ 600 & 500 & 300 \end{bmatrix}$ janë dhënë informata analoge gjatë vitit 2010.

Atëherë matrica

$$A - B = \begin{bmatrix} 300 - 400 & 400 - 200 & 200 - 500 \\ 700 - 600 & 500 - 500 & 800 - 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 200 & -200 \\ 100 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

e jep informatën për ndryshimin në madhësi të prodhimit në sezonin veror dhe dimëror (sipas rreshtave) të këpucëve për meshkuj, femra dhe fëmijë (sipas kolonave) të fabrikës prej njëres deri te tjetra. Kështu, për shembull, elementi $a_{11} = -100$ që do të thotë se prodhimi i këpucëve të meshkujve në sezonin veror ka rënë për 100 prej njërit vit në tjetrin, ndërsa $a_{22} = 0$ tregon se nuk kemi ndryshim në prodhimin e këpucëve të femrave në sezonin dimëror prej një viti në tjetrin.

Një $m \times n$ matricë quhet **matrica zero**, nëse çdo element i saj është i barabartë me 0. Zakonisht shënohet me O .

Në vazhdim do të tregojmë disa veti të operacioneve të përkufizuara.

A, B dhe C le të jenë $m \times n$ matrica dhe le të jetë $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Atëherë vlen:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + O = O + A = A$
3. $A + (-A) = (-A) + A = O$
4. $A + B = B + A$
5. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$
8. $1A = A$ dhe $0A = O$.

Me të vërtetë, nëse $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ dhe $C = [c_{ij}]$, atëherë vetitë e operacioneve mbledhje dhe shumëzim me numër real, për elementin vendi ij – vlen:

$$\begin{aligned} a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, & a_{ij} + 0 &= 0 + a_{ij} = a_{ij}, \\ a_{ij} + (-a_{ij}) &= (-a_{ij}) + a_{ij} = 0, & a_{ij} + b_{ij} &= b_{ij} + a_{ij}, \\ k_1(a_{ij} + b_{ij}) &= k_1a_{ij} + k_1b_{ij}, & (k_1 + k_2)a_{ij} &= k_1a_{ij} + k_2a_{ij}, \\ k_1(k_2a_{ij}) &= (k_1k_2)a_{ij}, & 1a_{ij} &= a_{ij} \text{ dhe } 0a_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Prej përkufizimit për barazi të dy matricave vijon se janë të sakta dhe barazitë e matricave përkatëse të shprehura te vetia.

Detyra

1. Gjeje shumën e matricave $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \\ 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 0 \\ 12 & -3 & -2 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Gjeji prodhimin e numrit 0, 5 dhe matricës $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Le të jenë dhënë matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Gjeji matricën: **a)** $A + B$;

b) $3B + C$;

c) $3A - 2B + C$.

4. Gjeji koeficientët x, y, z dhe t , ashtu që të vlejë

$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Me matricën $A = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 80 \\ 50 & 70 & 40 \end{bmatrix}$ është dhënë numri i mijëra paketimeve të fabrikës X dhe fabrikës Y (sipas rreshtave) të tre llojeve të prodhimeve të qumështit: jogurt, djathë dhe pavlakë në vitin 2021. Me matricën $B = \begin{bmatrix} 70 & 10 & 40 \\ 30 & 50 & 90 \end{bmatrix}$ janë dhënë informata gjatë vitit 2022. Cilën informatë e jep matrica $A - B$?

6. Te tabela janë dhënë të dhënat për jetën mesatare, të shprehur në vite, të racës së bardhë dhe të zezë prej popullatës mashkullore dhe femërore, të matur në vitin 1990, vitin 2000 dhe vitin 2010.

	Raca e bardhë		Raca e zezë	
	Meshkuj	Femra	Meshkuj	Femra
1950	56,4	57,6	45,5	45,7
1970	64,4	65,6	55,5	56,2
1990	73,7	76,7	67,2	69,8
2010	75,4	79,5	70,7	74,6

a) Formo matricë A që e përmban informatën për racën e bardhë dhe matricë B që e përmban informatën për racën e zezë.

b) Me përdorimin e matricave të formuara gjeji sa vjet mesatarisht më shumë raca e bardhë në çdo kategori jeton më shumë se sa raca e zezë.

8.7. Shumëzimi i matricave

Ngjashëm, sikurse edhe mbledhja e matricave, dhe prodhimi i dy matricave mund të jep informatën e kërkuar në bazë të së cilës do të bazohet ndonjë vendim afarist.

Nëse $A = [a_{ij}]$ është $m \times n$ matrica dhe $B = [b_{ij}]$ është $n \times p$ matrica, atëherë **prodhimi** AB është matrica $C = [c_{ij}]$ e rendit $m \times p$ ashtu që $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, për $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, dhe shkruajmë $C = AB$.

Me tjera fjalë, elementi c_{ij} i matricës $C = AB$ është shuma e prodhimeve të elementeve prej rreshtit i të matricës A me elementet përkatëse prej kolonës j – të matricës B .

Të vërejmë se prodhimi AB nuk është përkufizuar nëse numri i kolonave të matricës A është e ndryshme prej numrit të rreshtave të matricës B .

Shembulli 1. Le të jetë $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Atëherë

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & -2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \text{ dhe}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prej shembullit të fundit mund të përfundojmë se

- Shumëzimi i matricave është komutative;
- Prodhimi i dy matricave jozero mund të jetë matricë zero.

Shembulli 2. Prodhimet A dhe B janë përpunuar prej plastike, metali dhe qelqi me numër të njësisë prej çdo lënde të parë të dhënë në kjo tabelë:

	Plastika	Metal	Qelq
Prodhimi A	3	1	0,5
Prodhimi B	4	0,5	2

Për shkak të shpenzimeve të transportit të dy reparteve të fabrikës X dhe Y çmimet njësi të çdo lënde të parë janë të ndryshme. Në tabelë vijim janë dhënë shpenzimet e çdo lënde të parë të fabrikave:

	Firma tregtare X	Firma tregtare Y
Plastika	10	9
Metali	22	26
Qelqi	14	14

Prej informatave të gjejmë matricat $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0,5 \\ 4 & 0,5 & 2 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$

me të cilat janë dhënë njësitë e lëndëve të para për çdo prodhim dhe çmimet njësi të çdo lënde të parë, përkatësisht. Prodhimi i tyre

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0,5 \\ 4 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 + 22 + 7 & 27 + 26 + 7 \\ 40 + 11 + 28 & 36 + 13 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 60 \\ 79 & 77 \end{bmatrix}$$

e jep çmimin e çdonjërit prej prodhimeve A dhe B (sipas rreshtave) në çdonjërin prej reparteve të fabrikave X dhe Y .

Për prodhimin e matricave vlejnë këto veti:

1. Nëse $A = [a_{ij}]$ është $m \times p$ matrica, $B = [b_{ij}]$ është $p \times q$ matrica, dhe $C = [c_{ij}]$ është $q \times n$ matrica, atëherë

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{ligji asociativ})$$

Për shkak të vetisë së operacionit mbledhje dhe shumëzim me numër real, për elementin e vendit ij – vlen

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} \sum_{r=1}^q b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj}.$$

Baratzimi i shprehur te vetia vijon prej përkufizimit të dy matricave.

2. Nëse $A = [a_{ij}]$ është $m \times p$ matrica, por $B = [b_{ij}]$ dhe $C = [c_{ij}]$ janë $p \times n$ matrica, atëherë

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{ligji i majtë distributiv})$$

Për shkak të vetive të operacioneve mbledhje dhe shumëzim me numër real, për elementin e vendit ij – vlen

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^p (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj}.$$

Baratzimi vijon prej përkufizimit për barazi të dy matricave.

3. Nëse $B = [b_{ij}]$ dhe $C = [c_{ij}]$ janë $m \times p$ matrica, por $A = [a_{ij}]$ është $p \times n$ matrica, atëherë

$$(B + C)A = BA + CA \quad (\text{ligji i djathtë distributiv})$$

Për shkak të vetive të operacioneve mbledhje dhe shumëzim me numra realë, për elementin te vendi ij – vlen

$$\sum_{k=1}^p (b_{ik} + c_{ik}) a_{kj} = \sum_{k=1}^p (b_{ik} a_{kj} + c_{ik} a_{kj}) = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^p c_{ik} a_{kj}.$$

Baratzimi vijon prej përkufizimit për barazi të dy matricave.

4. Nëse $A = [a_{ij}]$ është $m \times p$ matrica, por $B = [b_{ij}]$ është $p \times n$ matrica, atëherë

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

Për shkak të vetive të operacioneve mbledhje dhe shumëzim me numra realë, për elementin te vendi ij – vlen

$$k \sum_{r=1}^p a_{ir} b_{rj} = \sum_{r=1}^p (k a_{ir}) b_{rj} = \sum_{r=1}^p a_{ir} (k b_{rj}).$$

Baratzimi vijon prej përkufizimit për barazi të dy matricave.

Nëse $n \in \mathbb{N}$, shënojmë $A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ herë}}.$

Detyra

1. A le të jetë $m \times n$ matrica, kurse B është $n \times m$ matrica. Gjeji rreshtin e matricave AB dhe BA . A mund $AB = BA$, nëse $m \neq n$?

2. Njehso prodhimet:

a) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix};$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};$

c) A^4 , nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

d) $A^3 - 2A^2 - 9A$ nëse $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3. Tabela vijuese jep informatë për sasi të prodhimeve të cilat duhet t'i blejnë

dy reparte A dhe B , në një firmë:

	Lesh	Mëndafsh	Pambuk
Reparti A	30	20	10
Reparti B	20	10	20

Për prodhimet kanë dy oferta prej dy furnizuesve X dhe Y , çmimet e të cilëve janë dhënë me tabelën në vijim:

	Furnizuesi X	Furnizuesi Y
Lesh	10	9
Mëndafsh	22	26
Pambuk	14	14

Gjeje matricën e cila jep informata për çmimin e tri sasive të prodhimeve të cilat duhet t'i blejnë repartet A dhe B prej furnizuesve X dhe Y .

8.8. Matrica inverse

Koncepti për matricën inverse

Matrica katrore e rendit n quhet matrica e rendit $n \times n$.

Shembulli 1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ është matricë katrore e rendit 2.

Matrica $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 11 & -3 \end{bmatrix}$ është matricë katrore e rendit 3.

Një matricë katrore A quhet **inversinile**, nëse ekziston matricë B e rendit të njëjtë sikurse A , ashtu që të vlejë

$$AB = BA = I.$$

Matrica B , nëse ekziston, është e vetme, pasi prej $AB_1 = B_1A = I$ dhe $AB_2 = B_2A = I$ vijon se $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$.

Matricën B do ta quajmë **inverse** e A dhe do ta shënojmë me A^{-1} .

Shembulli 2. Prej $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, vijon se

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Le të jenë A dhe B matrica inversinile katrore të rendit n . Atëherë vlen

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Me të vërtetë, kemi se

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I \quad \text{dhe}$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = I.$$

Njehsimi i matricës inverse

Le të jetë dhënë matrica katrore $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ të rendit të dytë 2. Për ta gjetur matricën A^{-1} (nëse ekziston), duhet ta zgjidhim sistemin

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

përkatesisht

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{dhe} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}.$$

Prej ku fitohet $x = \frac{d}{\det A}$, $y = \frac{-b}{\det A}$, $z = \frac{-c}{\det A}$, $t = \frac{a}{\det A}$, nëse $\det A = ad - bc \neq 0$.

Domethënë prej $\det A \neq 0$, atëherë matrica e dhënë është inversinile dhe matrica është

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Shembulli 3. Ta gjejmë matricën inverse të matricës katrore

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{të rendit 2.}$$

Kemi se $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$. Matrica inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vërejmë se matrica e fituar A^{-1} , për $\det A \neq 0$, e plotëson kushtin $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Prandaj, për $\det A \neq 0$ matrica A është inversinile dhe A^{-1} është matrica inverse e kërkuar.

Në vazhdim, do të realizojmë formulë për gjetjen e matricës inverse të çfarëdo matrice inversinile 3×3 . Le të jetë dhënë matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Për çdonjërin prej elementeve a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, ekziston komplementi algjebrik përkates A_{ij} . Pra $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, ku Δ_{ij} është minori që i përgjigjet elementit a_{ij} . Matrica e transponuar prej matricës përbëhet prej komplementeve algjebrike

quhet **matrica e adjunguar** për A shënohet me $adjA$. Domethënë, sipas përkufizimit kemi

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Për matricën A determinanta e të cilës nuk është zero, përkatësisht $A \neq 0$, e adjunguar për A vlen

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot adjA \right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot adjA \right) \cdot A = I$$

prej ku vijon se matrica inverse e matricës A është matrica

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

Shembulli 4. Ta gjejmë matricën inverse të matricës katrore

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ të rendit 3.}$$

Gjejmë se

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Për ta gjetur matricën inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$ të matricës A njehsojmë

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \end{aligned}$$

prej ku gjejmë se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detyra

1. Nëse matricat vijuese janë inversinile,

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}; \quad \text{ç)} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 25 \end{bmatrix};$$

gjeji matricat e tyre inverse.

2. Nëse matricat vijuese janë inversinile,

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix};$$

gjeji matricat e tyre inverse.

3. Gjeji matricat inverse të matricave:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

4. Le të jetë $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ është matrica diagonale, ku $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Gjeji matricën inverse të matricës D .

8.9. Barazimet e matricës

Barazimet e matricës quhen barazimet të cilat e panjohura është matricë. Zgjidhja e tyre shpesh është mënyrë e cila përbëhet prej dy pjesëve. Në pjesën e parë duhet ta zgjidhim barazimin e matricës, përkatësisht ta shprehim matricën e panjohur X , kurse të pjesa e dytë e gjejmë X me ndihmën e operacioneve të matricave dhe barazimi i matricave.

Do të shqyrtojmë disa lloje të barazimeve të matricave.

1. Barazimi i matricës së formës

$$AX = B$$

ku A është matricë inversibile e rendit n , matrica e panjohur e rendit $n \times m$, B është matrica e rendit $n \times m$, por X është matricë e panjohur e rendit $n \times m$.

Të dy anët e barazimeve të matricës prej të majtës i shumëzojmë me matricën inverse A^{-1} të matricës A . Atëherë kemi

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

prej ku me zbatimin e ligjit asociativ kemi se

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Pasi $A^{-1}A = I_n$ dhe $I_n X = X$, kemi se

$$X = A^{-1}B$$

është zgjidhje e barazimit të matricës së dhënë.

Shembulli 1. Ta zgjidhim barazimin e matricës

$$AX = B, \text{ ku } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Pasi } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \neq 0, \text{ zgjidhja e barazimit të matricës}$$

është

$$X = A^{-1}B.$$

Për ta gjetur matricën inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$ të matricës A njehsojmë

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

prej ku gjejmë se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atëherë kemi se

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Barazimi i matricës së formës

$$XA = B$$

ku A është matricë inversibile e rendit m , B është matrica e rendit $n \times m$, por X është matrica e panjohur e rendit $n \times m$.

Të dy anët e barazimit të matricës i shumëzojmë me matricën inverse A^{-1} të matricës A . Atëherë kemi

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

prej ku me zbatimin e ligjit asociativ kemi se

$$X(AA^{-1}) = BA^{-1}.$$

Pasi $AA^{-1} = I_m$ dhe $XI_m = X$, kemi se $X = BA^{-1}$ është zgjidhje e barazimit të matricës së dhënë.

Shembulli 2. Ta zgjidhim barazimin e matricës

$$XA = B, \text{ ku } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Pasi } \det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0, \text{ zgjidhja e barazimit të matricës}$$

mund të shkruhet në formën

$$X = A^{-1}B.$$

Për ta gjetur matricën inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$ të matricës A njehsojmë

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

prej ku gjejmë se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Atëherë kemi se

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Barazimi i matricës së formës

$$AXB = C$$

ku A është matricë inversinile e rendit n , B është matricë inversinile e rendit m , C është matricë e rendit $n \times m$, por X është matrica e panjohur.

Duke shumëzuar me matricën inverse A^{-1} të matricës A prej të majtës, kurse pastaj me matricën inverse B^{-1} të matricës B prej të djathtës, e fitojmë zgjidhjen

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Shembulli 3. Ta zgjidhim barazimin e matricës $AXB = C$ ku

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 10 \\ 5 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Matricat A dhe B janë inversinile, pasi që $\det A = 28$ dhe $\det B = 78$. Poashtu

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{14} & \frac{53}{28} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{3}{14} & -\frac{11}{28} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{5}{13} & -\frac{9}{26} \\ \frac{23}{78} & -\frac{8}{39} & -\frac{17}{78} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Në fund kemi $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1247}{728} & -\frac{1433}{182} & -\frac{3123}{728} \\ -\frac{212}{273} & -\frac{173}{273} & -\frac{79}{273} \\ \frac{619}{2184} & \frac{925}{546} & \frac{1991}{2184} \end{pmatrix}.$

Të përmendim se te të gjithë rastet zgjidhja e barazimit të matricës është e vetme.

Shembulli 4. Nëse $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, atëherë barazimi i matricës

$(A - 2I)X = A + I$ e zgjidhim në këtë mënyrë:

shumëzojmë me $A - 2I$ prej të majtës dhe kemi $(A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = (A - 2I)^{-1}(A + I)$, domethënë $X = (A - 2I)^{-1}(A + I)$. Më tutje,

$$B = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det B = 2 + 4 - 2 + 2 = 6$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Përfundimisht,

$$X = B^{-1}C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Detyra

1. Zgjidhe barazimin e matricës $AX = B$, nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Për $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ zgjidhe barazimin $X(I - B) = A$.

3. Nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, zgjidhe barazimin

$$(A - I)^{-1}XB^{-1} = C^{-1}.$$

4. Zgjidhe barazimin e matricës $AX - 2X = B$, nëse

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Zgjidhe barazimin e matricës $AX = X + A$, nëse $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Zgjidhe barazimin e matricës $AX - B = BX + I$, nëse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.10. Prezantimi i matricës së sistemit prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura

Sistemin prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

njëvlerësisht është përcaktuar me barazimin e matricës

$$AX = B$$

të quajtur **prezantimi i matricës** ku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

në pajtim me operacionet e njohura shumëzim të matricave dhe barazimet e matricave. Matrica katrore 3×3 e matricës A quhet **matrica e sistemit**, 3×1 matrica X – matrica e të panjohurave dhe 3×1 matrica B – matrica e anëtarëve të lirë.

Shembulli 1. Sistemi prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

njëvlerësisht është përcaktuar me barazimin e matricës

$$AX = B$$

ku

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dhe } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nëse matrica A ka matricë inverse A^{-1} , atëherë me shumëzimin prej të djathtës të të dy anëve të barazimit të matricës të sistemit me A^{-1} kemi

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

prej ku me zbatimin e ligjit asociativ kemi se

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Pasi $A^{-1}A = I_3$ dhe $I_3 X = X$, kemi se

$$X = A^{-1}B.$$

Duke pasur parasysh se $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ përfundimisht kemi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

prej ku në pajtim me operacionet e njohura shumëzimi i matricave dhe barazimi i matricave gjejmë se zgjidhjet e sistemit janë

$$x_1 = \frac{1}{\det A} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3).$$

Shembulli 2. Prezantimi i sistemit $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$ është

$$AX = B$$

ku

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ta gjejmë matricën inverse A^{-1} të matricës A . Kemi se

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 3 - 6 - 3 = -4, \text{ dhe}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

prej ku gjejmë se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atëherë kemi se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

prej ku në pajtim me operacionet e njohura shumëzimi i matricave dhe barazimi i matricave gjejmë se zgjidhjet e sistemit janë

$$x = \frac{1}{\det A} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3) = -\frac{1}{4}(-3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) = 1$$

$$y = \frac{1}{\det A} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3) = -\frac{1}{4}(-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$z = \frac{1}{\det A} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) = -1.$$

Shembulli 3. Restoranti përgatitë deserte të frutave sipas tre receta të ndryshme R_1 , R_2 dhe R_3 dhe poashtu shfrytëzon tre lloje të frutave O_1 , O_2 dhe O_3 . Të dhënat për sasinë e frutave të shprehur në gramë për përgatitjen e një deserti të frutave janë dhënë në tabela më poshtë. Janë të njohura sasi të çdo lloji të frutave, të shprehura në gram, që i ka në disponim restoranti. Sa deserte të frutave prej çdo reçete R_1 , R_2 dhe R_3 duhet të përgatiten për të shfrytëzuar në tërësi frutat që i ka në disponim restoranti?

Lloj i frutave	R_1	R_2	R_3	Sasia
O_1	40	30	40	3400
O_2	10	20	30	1600
O_3	20	30	50	4200

Ta gjejmë sistemin e barazimeve lineare me të cilin mund të modelohet problemi. Ta shënojmë me x , y dhe z , numrin e deserteve të frutave të përgatitura sipas reçetave R_1 , R_2 dhe R_3 , përkatësisht. E parashtrojmë sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} 40x + 30y + 40z = 5800 \\ 10x + 20y + 30z = 2600 \\ 20x + 30y + 50z = 4400 \end{cases}$$

që është ekuivalent me sistemin

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 580 \\ x + 2y + 3z = 260 \\ 2x + 3y + 5z = 440 \end{cases}$$

ku prezantimi i matricës është $AX = B$ ku

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 160 \\ 420 \end{bmatrix}.$$

Matrica inverse $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & 15 \end{bmatrix}$. Atëherë $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix}$.

prej ku gjejmë se zgjidhjet e sistemit janë $x = 80$, $y = 60$ dhe $z = 20$. Prandaj, duhet të përgatiten 80, 60 dhe 20 deserte të frutave prej reçetave R_1 , R_2 dhe R_3 , përkatësisht.

Detyra

1. Shkruaje prezantimi e matricës së sistemit të barazimeve lineare:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x - 3z = -1 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = -3 \\ -2x - 10z = 2 \\ 4x - 3y = z \end{cases}$$

2. Zgjidhi këto sisteme të barazimeve lineare:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x - 3y + 4z = 14 \\ -x + 2y - 5z = -13 \\ 2x + 5y - 3z = -5 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x - y + 3z = 20 \\ -3x + 4y + 2z = -7 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases} & \text{ç) } & \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Për prodhimin e tre prodhimeve të ndryshme P_1 , P_2 dhe P_3 shfrytëzohen tre lloje të makinave M_1 , M_2 dhe M_3 . Të dhënat për kohën të shprehura në orë për përpunimin e njësive prej çdo prodhimi janë dhënë në tabela poshtë. Janë të njohura kapacitetet e çdo makine të shprehur në orë. Sa copa prej çdo prodhimi P_1 , P_2 dhe P_3 duhet të prodhohen për të shfrytëzuar në tërësi kapacitetin e makinave?

Makina	P_1	P_2	P_3	Kapaciteti
M_1	5	2	1	280
M_2	3	4	2	350
M_3	4	3	5	490

- a) Gjeji modelin e matricës nëpërmjet sistemit të barazimeve lineare.
b) Zgjidhe sistemin e barazimeve.
c) Komento rezultatin e fituar.

4. Tri familje bëjnë sallatë për piknikun veror. I pari shfrytëzon tre kilogram krastaveca, pesë kilogram domate një kilogram qep me çmim prej 230 denarë. I dyti shfrytëzon tre kilogramë krastaveca, dy kilogramë domate dhe dy kilogramë qepë me çmim prej 210 denarë. Fqiu i fundit shfrytëzon katër kilogramë

krastaveca, tre kilogramë domate dhe tre kilogramë qepë me çmim prej 300 denarë. Sa është çmimi i çdo perime?

8.11. Metoda e Gausit të eliminimit

Për zgjidhje numerike të sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura, janë të njohura **metoda e koeficientëve të kundërt** dhe **metoda e zëvendësimit**. Edhe të dy metodat mund të zbatohen edhe për sistemet e barazimeve lineare me tre të panjohura, kurse praktika ka treguar se në atë rast më efikas është të shfrytëzohet metoda e cila është kombinim i këtyre dy metodave, dhe quhet metoda e **Gausit të eliminimit**.

Le të jetë dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

- Mund të supozojmë se $a_{11} \neq 0$, pasi në të kundërtën, barazimi i parë mund të zëvendëson vendin me të dytin ose me të tretin ashtu që koeficienti para x të jetë jozero. Nëse të gjithë koeficientët para x janë të barabarta me zero, atëherë do të kemi sistem me dy të panjohura.

- Barazimi i parë i shumëzuar me $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ia shtojmë barazimit të dytë, kurse pastaj

i shumëzuar me $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ia shtojmë barazimit të tretë. Atëherë koeficientët para x

te barazimi i dytë dhe tek i tretë bëhen zero, përkatësisht fitojmë sistem ekuivalent me sistemin e formës

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

- Nëse $a'_{22} \neq 0$, atëherë barazimi i dytë i shumëzuar me $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ ia shtojmë

barazimit të tretë. Me këtë fitojmë sistem ekuivalent të formës së sipërme, kurse edhe të fillimit, të formës

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases} \quad (2a)$$

Nëse $a'_{22} = 0$, por $a'_{32} \neq 0$, atëherë barazimi i dytë dhe i tretë i ndërrojnë vendet e veta, pra përsëri mundemi sistemin ta sjellim në formën (2a).

Nëse tani, $a'_{22} = a'_{32} = 0$, atëherë kemi sistemin

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases}$$

pra vërejmë se prej koeficientëve a'_{23} dhe a'_{33} është i ndryshëm prej zeros. Nëse për shembull, $a'_{23} \neq 0$, barazimi i dytë i shumëzuar me koeficientin përkatës ia shtojmë

barazimit të tretë dhe poashtu fitojmë sistem ekuivalent të formës

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2b)$$

Nëse tani $a'_{22} = a'_{23} = a'_{32} = a'_{33} = 0$, atëherë kemi sistem ekuivalent

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ 0z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2c)$$

Në çdo rast, sistemi (1) është ekuivalent me njërin prej sistemeve (2a), (2b) dhe (2c).

• Zgjidhje e sistemit (2a):

Rasti 1. Nëse $a''_{33} \neq 0$, atëherë barazimi i tretë njëvlerësisht është përcaktuar z , kurse pastaj vlera e atillë e fituar e z zëvendësohet te barazimi i dytë, Pasi $a'_{22} \neq 0$, y njëvlerësisht përcaktohet prej barazimit të dytë, pra kështu vlerat e caktuara y dhe z zëvendësohen te barazimi i parë. Pasi $a'_{11} \neq 0$, dhe x përcaktohen njëvlerësisht. Domethënë, sistemi (1) ka zgjidhje të vetme.

Rasti 2. Nëse $a''_{33} = 0$, kurse $b'''_3 \neq 0$, sistemi (2) është kundërthënës

Rasti 3. Nëse $a''_{33} = b'''_3 = 0$, barazimi i fundit të sistemit (2a) është i tepërt dhe e hedhim pasi sillet në $0 = 0$. Duke pasur parasysh çfarëdo vlere t për z te barazimi i dytë, fitojmë zgjidhje të njëvlerëshme për y pasi

$a'_{22} \neq 0$, $y = \frac{b'_2 - a'_{23}t}{a'_{22}} = u$. Poashtu kthehemi te barazimi i parë prej të cilës fitohet njëvlerësisht $x = \frac{b_1 - a_{12}u - a_{13}t}{a_{11}}$; pasi $a_{11} \neq 0$. Domethënë, në këtë rast sistemi (1)

ka pafund shumë zgjidhje.

• Zgjidhje e sistemit (2b):

Rasti 1. Nëse $b'''_3 \neq 0$, atëherë sistemi është kundërthënës.

Rasti 2. Nëse $b'''_3 = 0$, atëherë barazimin e tretë e hedhim si të tepërt, prej dytës kemi $z = \frac{b'_2}{a'_{23}} = z_0$ dhe duke zgjedhur për y çfarëdo vlere t prej barazimit të

parë gjemë zgjidhje të vetme për x , $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}z_0}{a_{11}}$.

• Zgjidhja e sistemit (2c):

Rasti 1. Nëse $b'_2 \neq 0$ ose $b'''_3 \neq 0$, atëherë sistemi është kundërthënës.

Rasti 2. Nëse $b'_2 = b'''_3 = 0$, atëherë barazimi i dytë dhe i tretë janë të tepërt. Te barazimi i parë marrim çfarëdo vlere t dhe u për y dhe z , përkatësisht, por pastaj x caktohet njëvlerësisht pasi $a_{11} \neq 0$, $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}u}{a_{11}}$.

Nuk është vështirë të vërehet se vijimi i sipërm i realizimit të njehsimit (algoritmi) i metodës së Gausit nuk është e vetme. Zgjedhja e algoritmit shpesh e kryejmë duke shfrytëzuar specifikat e sistemit.

Shembulli 1. Për të zgjidhur sistemin
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
 vërejmë se ai është ekuivalent me
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
. Duke shumëzuar barazimin e parë me -2 dhe shtuar të dytit, fitohet sistemi ekuivalent
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{cases}$$
. Duke shumëzuar barazimin e dytë me -3 dhe duke shtuar te barazimi i tretë fitohet sistemi ekuivalent
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 4z = -4 \end{cases}$$
. Prej sistemit të fundit kemi $z = -1, y = 0, x = 1$.

Më tutje, me R_i do ta shënojmë me i barazimin e sistemit, për $i = 1, 2, 3$. Shumëzimi i barazimit me numrin k do ta shënojmë me kR_i . Shumëzimi i barazimit i me k dhe shtuarja j do ta shënojmë me $kR_i + R_j$, kurse ndërrimi i vendeve të barazimit i dhe j me $R_i \leftrightarrow R_j$.

Shembulli 2. Zgjidhja e sistemit
$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases}$$
 realizohet sikurse

vijon:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases} \xrightarrow{-R_1 + R_3} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases} \xrightarrow{-2R_2 + R_3} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 0y + 0z = 4 \end{cases}$$

Barazimi i tretë te sistemi i fundit është kundërthënës dhe prandaj sistemi është kundërthënës.

Shembulli 3. Për sistemin
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 9z = 12 \end{cases}$$
 me zbatimin e metodës së

Gausit kemi sisteme ekuivalente

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 9z = 12 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3}} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \\ 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \end{cases}$$

Prej barazimit të fundit të sistemit të fundit kemi $z = 1$. Pastaj, duke zgjedhur çfarëdo vlere $y = t$ për x kemi $x = 1 - t$. Domethënë, sistemi ka pafund shumë zgjidhje: $x = 1 - t, y = t, z = 1$, për çdo numër real t .

Metoda e Gausit mund të përdoret edhe për zgjidhjen e sistemit në prezantimin e matricës.

Le të jetë dhënë sistemi
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$
 Matrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

quhet **matrica e zgjeruar e sistemit**. Te kjo matricë kryhen transformimet të përshkruar paraprakisht, prej metodës së Gausit. Kështu, ajo matricë sillet deri në shkallë dhe prej atje gjenden zgjidhjet e sistemit.

Shembulli 4. Për sistemin
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 5 \\ 6x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$$
 matrica e zgjeruar e sistemit

është $A_{\Pi} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix}$. Me transformimet e matricës kemi

$$A_{\Pi} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{3}{2}R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kjo do të thotë se barazimi i dytë (domethënë rreshti i dytë i matricës) të sistemit është $0x + 0y + 0z = 1$, pra sistemi nuk ka zgjidhje

Shembulli 5. Matricën e zgjeruar të sistemit
$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$
 e

transformojmë dhe kemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tani, prej rreshtit të fundit kemi $-6z = 1$, pra $z = -\frac{1}{6}$. Prej rreshtit të fundit kemi

$-y + 3z = -1$, domethënë $y = \frac{1}{2}$. Edhe prej rreshtit të parë kemi $x + 2y - z = 5$, domethënë

$$x = \frac{23}{6}.$$

Metoda e Gausit shfrytëzohet edhe për gjetjen e matricës inverse, të njohur si **algoritmi i Gausit për matricën inverse**.

Ajo është për këtë matricën A zgjerohet me njësinë prej rreshtit përkatës, domethënë formohet matrica $[A | I]$. Pastaj asaj matrice i kryhen transformimet e përshkruar më lartë. Nëse matrica A është josingulare, me këto transformime do të fitohet matrica ekuivalente $[I | A^{-1}]$.

Shembulli 6. Gjetja e matricës A^{-1} për $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 [A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{2R_3+R_1 \\ -R_3+R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(-1)R_2 \\ (-1)R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{(-1)R_2 \\ (-1)R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}].
 \end{aligned}$$

Prej këtu, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Detyra

Me ndihmën e metodës së Gausit dhe me matricën prezantuese zgjidhi këto sisteme:

1. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4. \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3. \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 1. \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4 \\ 6x - 2y + 3z = -1, \\ 5x - 3y + 2z = -3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 \\ 3x + 4y + 2z = -10. \\ 2x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6. \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8. \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - z = 11. \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

9. Me metodën e Gausit, gjeji matricën inverse të

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Njehso vlerën e determinantës:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

2. Vërteto se barazimi ka $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$, ku a, b dhe c janë numra realë.
ka rrënjë reale.

$$\text{3. Vërteto barazimet} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 + a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 + a \\ 1 & a^3 & a^2 + a \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{4. Vërteto identitetin} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & \frac{1}{2}(y_1 + y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2) & \frac{1}{2}(y_1 - y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{5. Me zbatimin e vetive të determinantës njehso} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s+1 & s+2 & s+3 \\ s+4 & s+5 & s+7 \end{vmatrix}.$$

$$\text{6. Zgjidhe pabarazimin} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & x+2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & x & -3 \end{vmatrix} < 0.$$

$$\text{7. Për cilën vlerë të } a, \text{ sistemi } \begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x - y = a \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ ka zgjidhje?}$$

8. Zgjidhi këto sisteme të barazimeve me tre të panjohura:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases}.$$

$$\text{9. Zgjidhe sistemin e barazimeve: } \begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}.$$

$$\text{10. Në cilin rast sistemi i barazimeve } \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ ax - by = ab \end{cases} \text{ ka zgjidhje?}$$

11. Zgjidhe sistemin e barazimeve:
$$\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$$
 për çfarëdo numra

realë të dhënë a, b, c .

12. Për cilat numra realë x, y, z dhe t vlen

$$2 \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

13. Le të jetë $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Gjeji matricat $(AB)^T$ dhe $B^T A^T$.

Çka përfundon?

14. Zgjidh dy matrica katrore A dhe B të rendit

a) 2; b) 3;

por pastaj kontrollo a vlen identiteti $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

15. Vërteto se nëse matricat A dhe B komutojnë, përkatësisht nëse $AB = BA$, atëherë vlejnë barazimet:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; b) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

16. Gjeji matricat inverse të matricave

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{bmatrix}$.

me ndihmën e matricës së cinguar.

17. Zgjidhi këto matrica të barazimeve:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; b) $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ 2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$; ç) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Shkruaje prezantimin e matricës dhe zgjidhi këto sisteme të barazimeve lineare:

a) $\begin{cases} 2x - 6y + 8z = 28 \\ -2x + 4y - 10z = -26 \\ 4x + 10y - 6z = -10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 3y + 9z = 60 \\ -9x + 12y + 6z = -21 \\ -3x + 6y + 3z = -6 \end{cases}$.

19. Me ndihmën e metodës së Gausit zgjidhi sistemet e barazimeve:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 3x - 4y = 11 \\ 2x - z = 11 \end{cases}$.

20. Fabrika e tekstilit përpunon tre modele të këmishave të cilat i eksporton në tre shtete. Në shtetin e parë eksporton 500, 100 dhe 600 këmisha prej çdo modeli, përkatësisht, në shtetin e dytë eksporton 300, 700 dhe 400 këmisha prej çdo modeli, përkatësisht, dhe në shtetin e tretë eksporton 200, 400 dhe 800 këmisha prej çdo modeli, përkatësisht. Shkruaji të dhënat me ndihmën e matricës.

21. Matrica $A = \begin{bmatrix} 100 & 400 & 200 \\ 500 & 500 & 800 \end{bmatrix}$ e paraqet shpenzimin e energjisë elektrike në kilovat orë të familjes A për muajin mars, prill dhe maj në vitin 2021 dhe 2022. Matrica $B = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 500 \\ 600 & 100 & 300 \end{bmatrix}$ jep informata analoge për familjen B .

Me ndihmën e ndryshimit të matricës A me matricën B , krahasoje shpenzimin e të dy familjeve.

22. Te tabela është dhënë sasia e lëndëve të para në tonelata të cilat duhet t'i blejnë të dy fabrikat A dhe B :

	Xehe hekuri	Koks	Gëlqere
Fabrika A	40	20	50
Fabrika B	20	30	10

Për lëndët e para ka oferta prej dy furnizuesve X dhe Y , çmimet të të cilave janë dhënë te tabela:

	Furnizuesi X	Furnizuesi Y
Xehe hekuri	12	8
Koks	28	32
Gëlqere	16	11

Gjeje matricën e cila jep informatë për çmimin e të tri sasive të lëndëve të para të cilët t'i blejnë fabrikat A dhe B prej furnizuesve X dhe Y .

23. Ana, Jovani dhe Arta kanë blerë ngjyra, furçë dhe pëlhurë. Te tabela janë dhënë numrat e prodhimeve të blera dhe shumat në euro që çdonjëri prej tyre i kanë paguar për prodhimet. Njehso çmimin e çdo prodhimi njësi.

	Ngjyra	Furça	Pëlhurë
Ana	3	4	5
Jovani	2	5	7
Arta	4	3	6

24. Lulishtja bën 5 buqeta identike për dhuratë për dasmë. Ajo ka planifikuar të shpenzon 6100 denarë dhe dëshiron çdo buqetë të ketë 24 lule. Trëndafila kushtojnë nga 60 denarë, tulipanët kushtojnë nga 40 denarë, kurse gerberët kushtojnë nga 30 denarë. Përveç kësaj dëshiron të ketë dyfish më shumë trëndafila prej dy llojeve tjera të luleve të kombinuara në çdo buqetë. Sa trëndafila, tulipan dhe gerbera ka në çdo buqetë?

9. FUNKSIONE ELEMENTARE. VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

9.1 Funkzioni real

Koncepti për funksionin

Në jetën e përditshme shfrytëzohen madhësi të ndryshme, gjatësia, syprina, masa, vëllimi, temperatura, koha etj. Ato paraqiten në çdo proces natyror, varet njëri prej tjetrit dhe ndryshojnë varësisht prej ndryshimit të ndonjë madhësie tjetër.

Shembulli 1. a) E dimë se syprina e katrorit me brinjë a njehsohet sipas formulës $S = a^2$. Vërejmë se me zmadhimin e gjatësisë së brinjës zmadhohet edhe syprina e katrorit, kurse me zvogëlimin e gjatësisë së brinjës zvogëlohet edhe syprina e katrorit. Kështu, syprina e katrorit varet prej gjatësisë së brinjës.

b) Prej fizikës dihet se gjatësia e rrugës S gjatë rënies së lirë njehsohet me formulën $S = \frac{gt^2}{2}$ ku g është nxitimi i Tokës. Prandaj, gjatësia e rrugës së kaluar varet prej kohës për të cilën që trupi bie poshtë.

Prej shembullit të sipërm përfundojmë se kemi dy bashkësi prej madhësive të ndryshme dhe rregulla për shoqërimin sipas të cilës me ndryshimin e madhësive të njëra bashkësi ndryshojnë madhësitë në bashkësinë tjetër.

Le të jetë $\mathbb{R}$ bashkësia e numrave real dhe le të jetë $D \subseteq \mathbb{R}$. Nëse çdo elementi $x \in D$ sipas rregullës prej përpara të konstatuar i shoqërojmë saktë një element të caktuar

y prej $\mathbb{R}$, atëherë thuhet se është caktuar **funkzioni real** prej D në $\mathbb{R}$, dhe shkruajmë $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Funksionet i shënojmë me shkronja të vogla të alfabetit latin, për shembull $f, g, h, \dots$

Në vend të $x \in D$ funksionit f i shoqëron numër real $f(x)$, të quajtur **vlera e funksionit** f në pikën x . Elementi $x \in D$ quhet **vlera e ndryshores së pavarur**, kurse elementi $f(x)$ e quajmë **vlera e ndryshores së varur**. Bashkësia D quhet **fusha e përkufizimit** të funksionit f dhe shënohet me D_f . Bashkësia prej të gjitha vlerave të funksionit f quhet **bashkësia e vlerave** të f dhe shënohet me V_f . Domethënë

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D \}.$$

Shembulli 2. a) Për funksionin $f(x) = x^2$ kemi se $f(0) = 0^2 = 0$, që do të thotë vlera e funksionit te pika $x = 0$ është $f(0) = 0$.

Funksioni është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$. Domethënë, kemi se fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$, dhe bashkësia e vlerave është $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

b) Funkzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ është funksion i përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$ përveç për $x = 0$. Domethënë, fusha e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dhe bashkësia e vlerave është $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Funkzioni $g(x) = \sqrt{x}$ është përkufizuar për ato $x \in \mathbb{R}$ për të cilat $x \geq 0$. Domethënë, fusha e përkufizimit është $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$, dhe bashkësia e vlerave $Vg = [0, +\infty)$.

Shembulli 3. Ta gjejmë fushën e përkufizimit të çdonjërit prej funksioneve:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$ **b)** $f(x) = \frac{x^7 - 5}{x^2 + 4x + 3}$ **ç)** $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$

ç) $f(x) = \log_2(4x - 1)$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 1}$.

a) Kemi se $D_f = \mathbb{R}$.

b) Është e nevojshme $x^2 + 4x + 3 \neq 0$, përkatësisht $(x + 3)(x + 1) \neq 0$ që do të thotë se $x \neq -3$ dhe $x \neq -1$. Pasi $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$

c) Është e nevojshme $4 - 5x \geq 0$, përkatësisht $x \leq \frac{4}{5}$. Domethënë $D_f = \left(-\infty, \frac{4}{5}\right]$.

ç) Nevojitet $4x - 1 > 0$, respektivisht $x > \frac{1}{4}$. Domethënë $D_f = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

d) Pasi punohet për rrënjën e tretë (tek) kemi se $D_f = \mathbb{R}$.

Për funksionet f dhe g themi se janë **të barabarta**, dhe shkruajmë dhe $f = g$, nëse vetëm nëse janë plotësuar kushtet:

- $D_f = D_g$, përkatësisht f dhe g kanë fushë të përkufizimit të njëjtë,
- $f(x) = g(x)$ për çdo $x \in D_f = D_g$, përkatësisht f dhe g kanë veprim të njëjtë.

Shembulli 4. a) Funksionet $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ të përkufizuara me

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 1, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}$$

janë të barabarta, pasi $D_f = D_g = \mathbb{R}$, dhe

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + 1 = g(x), \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}$$

b) Funksionet $f(x) = \frac{x}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ dhe $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ nuk janë të barabarta, pasi kanë fusha të ndryshme të përkufizimit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, apo $D_g = \mathbb{R}$.

Grafiku i funksionit

Përkufizimi 1. Grafiku i funksionit bashkësia prej dysheve të renditura $f(x)$ me fushën e përkufizimit D_f është

$$\Gamma f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Pika $M(x, f(x))$ i takon grafikut të funksionit, x është koordinata e parë, por $f(x)$ koordinata e dytë e pikës M .

Monotonia e funksionit

Për funksionin $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ themi se

- **monotonisht rritet** në bashkësinë $D_1 \subseteq D$, nëse (figura 2a)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \text{ për çdo } x_1, x_2 \in D_1$$

- **monotonisht rritet në mënyrë rigoroze** te bashkësia $D_1 \subseteq D$, nëse

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ për çdo } x_1, x_2 \in D_1$$

- **monotonisht zvogëlohet** te bashkësia $D_1 \subseteq D$, nëse (figura 2b)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \text{ për çdo } x_1, x_2 \in D_1$$

- **monotonisht zvogëlohet në mënyrë rigoroze** te bashkësia $D_1 \subseteq D$, nëse

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \text{ për çdo } x_1, x_2 \in D_1$$

Funksioni i cili rritet ose zvogëlohet quhet **monotonia e funksionit**. Funksioni është **monotone rigoroze** te bashkësia D_1 nëse është rritëse rigoroze ose zvogëluese rigoroze.

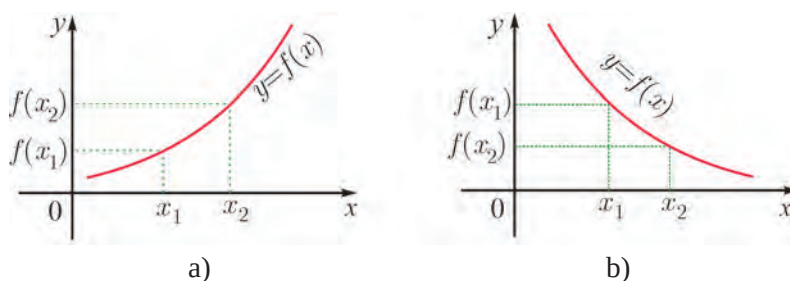


Figura 2

Shembulli 5. a) Ta shqyrtojmë monotoninë e funksionit $f(x) = 2x - 1$, për çdo $x \in \mathbb{R}$. Le të jetë $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ dhe le të jetë $x_1 < x_2$. Kemi

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - (2x_2 - 1) = 2(x_1 - x_2) < 0$$

përkatësisht $f(x_1) < f(x_2)$. Prandaj, funksioni monotonisht rritet në mënyrë rigoroze në gjithë fushën e përkufizimit, përkatësisht në gjithë drejtëzën reale.

b) Ta shqyrtojmë monotoninë e funksionit $f(x) = 1 - x^3$, të përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$. Le të jetë $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ dhe $x_1 < x_2$. Kemi

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - x_1^3 - (1 - x_2^3) = -x_1^3 + x_2^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_2 - x_1) \left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} \right) > 0 \end{aligned}$$

përkatësisht $f(x_1) > f(x_2)$. Prandaj, funksioni monotonisht zvogëlohet në mënyrë rigoroze fusha e përkufizimit, përkatësisht në gjithë drejtëzën reale.

c) Ta shqyrtojmë monotoninë e funksionit $f(x) = x^2$, të përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$. Le të jetë $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ dhe le të jetë $x_1 < x_2$. Kemi

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

përkatësisht $f(x_1) > f(x_2)$, që do të thotë funksioni monotonisht zvogëlohet në mënyrë rigoroze në intervalin $(-\infty, 0]$. Le të jetë $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ dhe le të jetë $x_1 < x_2$. Kemi

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

përkatësisht $f(x_1) > f(x_2)$, që do të thotë funksioni rritet monotonisht në mënyrë rigoroze në intervalin $[0, +\infty)$.

Zerot e funksionit

Zero e funksionit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ quhet numri real $x \in D_f$ për të cilin vlen $f(x) = 0$.

Prej përkufizimit të zeros së funksionit drejtpërdrejt vijon se grafiku i funksionit e pret boshtin x në pikat abshisat e të cilave janë zerot e funksionit f .

Shembulli 6. T'i gjejmë zerot e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

b) $f(x) = e^{5x}$

a) Funksioni i dhënë është përcaktuar në bashkësinë e numrave real, domethënë $D_f = \mathbb{R}$. Zerot e funksionit janë rrënjët e barazimit $f(x) = 0$, përkatësisht rrënjët e barazimit katror $3x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 1$ dhe $x_2 = \frac{2}{3}$.

b) Pasi $D_f = \mathbb{R}$ dhe $f(x) = e^{5x} > 0$ vijon se funksioni nuk ka zero.

Operacione me funksione

Le të jenë dhënë funksionet $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dhe $g : D \rightarrow \mathbb{R}$

1. Shuma e funksioneve f dhe g është funksioni $(f + g) : D \rightarrow \mathbb{R}$ i përkufizuar me

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ për çdo } x \in D$$

2. Prodhimi i funksioneve f dhe g është funksioni $(fg) : D \rightarrow \mathbb{R}$ i përkufizuar me

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ për çdo } x \in D$$

3. Herësi i funksioneve f dhe g ku $g(x) \neq 0$, për çdo $x \in D$ është

funksioni $\left(\frac{f}{g}\right) : D \rightarrow \mathbb{R}$ i përkufizuar

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ për çdo } x \in D, g(x) \neq 0.$$

Shembulli 7. Le të jenë funksionet $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ të përkufizuara me $f(x) = x^2 + 1$ dhe $g(x) = 2x$. Shuma e tyre, prodhimi dhe herësi janë funksionet

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = 2x(x^2 + 1), \text{ për çdo } x \in \mathbb{R} \text{ (} f \text{ ö } x^2 + 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Detyra

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - 2x + 4$, gjeji vlerat:

a) $f(-1)$; **b)** $f(0)$; **c)** $f(2)$.

2. Cakto a janë të barabarta funksionet $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, nëse:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D_f = [0, \infty)$, $g(x) = x$, $D_g = [0, \infty)$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $D_g = \mathbb{R}$.

3. Cakto fushën e përkufizimit të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$; **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$; **c)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Cakto fushat e përkufizimit të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$; **b)** $f(x) = \frac{x-2}{e^{\sqrt{x}}}$; **c)** $f(x) = \sqrt{2-2^x}$;

ç) $f(x) = \log x^2$; **d)** $f(x) = \log(3x+4)$; **dh)** $f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

5. Vërteto se këto funksione monotonisht rriten:

a) $f(x) = x + 3$; **b)** $f(x) = x^3 - 1$;

c) $f(x) = \ln(x-1)$; **ç)** $f(x) = e^{x+1}$.

6. Vërteto se këto funksione monotonisht zvogëlohen:

a) $f(x) = 1 - 2x$; **b)** $f(x) = 1 - x^3$;

c) $f(x) = -\ln(x+3)$; **ç)** $f(x) = 3^{-x}$.

7. Cakto zerot e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; **b)** $f(x) = \ln(1-2x)$; **c)** $f(x) = 3^{x+3}$.

8. Cakto shumën, prodhimin dhe herësin e funksioneve $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ të përkufizuara me $f(x) = x^3$ dhe $g(x) = x + 1$.

9.2. Funksioni linear

Funksioni i formës

$$f(x) = ax + b$$

ku a dhe b janë numra realë, të quajtur koeficient, kurse x është ndryshore e pavarur quhet **funksion linear**.

Fusha e përkufizimit të funksionit linear $f(x) = ax + b$ është tërë bashkësia e numrave real, përkatësisht $D_f = \mathbb{R}$.

Nëse $a \neq 0$, atëherë për bashkësinë e vlerave V_f kemi $V_f = \mathbb{R}$. Nëse $a = 0$, atëherë funksioni linear quhet **funksioni konstant** dhe në këtë rast bashkësia e vlerave $V_f = \{b\}$ është bashkësi njëelementësh.

Shembull 1. Funksioni $f(x) = x + 1$ është linear me parametra $a = 1$ dhe $b = 1$, fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R}$ dhe $V_f = \mathbb{R}$.

Zero e funksionit linear $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ është rrënja x_0 barazimit linear përkatës $ax + b = 0$, përkatësisht $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Shembulli 2. Zero e funksionit $f(x) = 2x - 4$ është $x = -\frac{-4}{2} = 2$.

Shembulli 3. Ta gjejmë vlerën e parametrin a , për të cilin funksioni $f(x) = ax + 7$, ka zero $x_0 = -\frac{2}{3}$.

Prej $-\frac{7}{a} = -\frac{2}{3}$ fitohet se $a = \frac{21}{2}$.

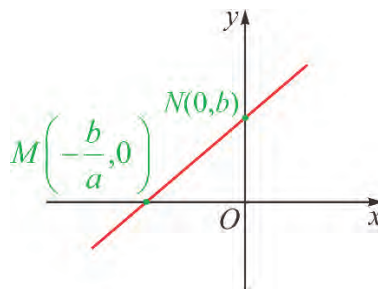


Figura 1

Grafiku i funksionit linear $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ është drejtëz. Për $x = 0$, kemi $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, prej ku vijon se grafiku i funksionit e pret boshtin e ordinatës në pikën $N(0, b)$.

Më tutje për $x = -\frac{b}{a}$, kemi $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$, që do të thotë grafiku i funksionit e pret boshtin e abshisës në pikën $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ (figura 1).

Shembulli 4. Grafiku i funksionit linear $f(x) = 2x + 3$ është drejtëz të cilën mund ta skicojmë nëse zgjedhim dy pika, për shembull, prerjet me boshtet e koordinatave $(0, 3)$ dhe $(-\frac{3}{2}, 0)$ (figura 2).

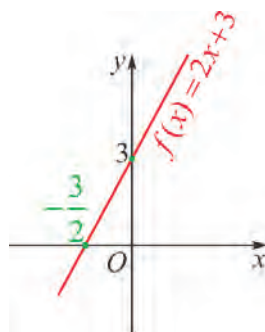


Figura 2

Shembulli 5. Pikat $(1, 0)$, $(3, -1)$, $(0, -2)$ dhe a janë pikat e grafikut të funksionit $f(x) = -x + 2$?

Për ta kontrolluar se pikat a i takojnë grafikut të funksionit $f(x) = -x + 2$ duhet t'i zëvendësojmë koordinatat përkatëse të pikave dhe të kontrollojmë se a fitohen barazime të sakta. Lehtë konstatohet se pikat $(3, -1)$ dhe $(1, 1)$ i takojnë, kurse pikat $(1, 0)$ dhe $(0, -2)$ nuk i takojnë grafikut (figura 3).

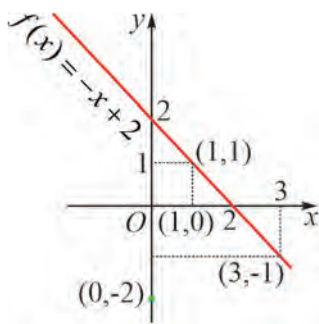


Figura 3

Funksioni linear $f(x) = ax + b$ është rritëse rigoroze nëse $a > 0$, ndërsa është zvogëluese nëse $a < 0$.

Me të vërtetë, nëse $a > 0$, atëherë për $x_1 < x_2$ vijon se

$$f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$$

që do të thotë funksioni është rritëse rigoroze. Ngjashëm, nëse $a < 0$, atëherë prej $x_1 < x_2$ vijon se

$$f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$$

që do të thotë funksioni është zvogëluese rigoroze.

Shembulli 6. Funksioni $f(x) = 4x - 11$ monotonisht rritet pasi $a = 4 > 0$, por te funksioni $f(x) = 3 - x$, $a = -1 < 0$, pra ai monotonisht zvogëlohet.

Detyra 7. Cakto vlerën e parametrin m te funksioni:

- a) $f(x) = (m-1)x + 3$, nëse ai monotonisht rritet;
 b) $f(x) = (2m+1)x + 1$, nëse ai monotonisht zvogëlohet.

Zgjidhje. a) $m-1 > 0 \Rightarrow m > 1$ domethënë. $m \in (1, \infty)$;

b) $2m+1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$ domethënë $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

Detyra

1. Cakto parametrat a dhe b te funksioni:

a) $f(x) = 6x - 1$;

b) $f(x) = 1 - 2x$;

c) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = \frac{3x-5}{7}$.

2. Cakto zerot e funksionit:

a) $f(x) = x - 3$;

b) $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$;

c) $f(x) = \frac{4-x}{9}$;

d) $f(x) = \frac{2}{7} - \frac{x+1}{3}$.

3. Cakto vlerën e parametrat a te funksioni:

a) $f(x) = (a+1)x + 3$, nëse $x_0 = -1$ është zero e funksioni;

b) $f(x) = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$, nëse grafiku i tij kalon nëpër pikën $M(1,1)$;

c) $f(x) = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, nëse grafiku i tij e pret boshtin y në pikën $N(0, 3)$.

4. Është dhënë funksioni $f(x) = \frac{3x+1}{6}$. Kontrolllo cila prej pikave $A(1,1)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ dhe $D\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ i takon grafikut të funksionit.

5. Cili prej këtyre funksioneve

a) $f(x) = 2x + 5$; b) $g(x) = -3x + 2$; c) $h(x) = \frac{4}{5} - \frac{7}{8}x$.

janë monotone rritëse, kurse cilat monotone zvogëluese?

9.3. Funksioni katror

Funksioni i formës

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ku a, b dhe c janë numra realë $a \neq 0$, dhe x është ndryshorja e pavarur quhet **funksioni katror**.

Fusha e përkufizimit të funksionit katror $f(x) = ax^2 + bx + c$ është tërësisht bashkësia e numrave real, përkatësisht $D_f = \mathbb{R}$

Shembulli 1. Funkzioni $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + 4$ është funksion katror me koeficient $a = -1$, $b = \frac{2}{3}$ dhe $c = 4$.

Zerot e funksionit katror $f(x) = ax^2 + bx + c$ janë rrënjët reale përkatësisht të barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$. Prandaj, funksioni katror mund të ketë dy zero, një zero ose të mos ketë asnjë zero, varësisht prej shenjës së diskriminantës $D = b^2 - 4ac$ të barazimit katror përkatës

Shembulli 2. Gjeji zerot e funksioneve katror:

a) $f(x) = x^2 + x - 12$; **b)** $f(x) = x^2 - 4x + 4$; **c)** $f(x) = x^2 + x + 12$.

a) Diskriminanta e barazimit katror $x^2 + x - 12 = 0$ është $D = 1 + 48 > 0$ prej ku vijon se ai ka dy rrënjë reale janë zero të funksionit katror. $x_1 = -4$ dhe $x_2 = 3$, të cilat

b) Diskriminanta e barazimit katror $x^2 - 4x + 4 = 0$ është $D = 0$ prej ku vijon se ai ka një zero reale zero $x = 2$, që është e funksionit katror të dhënë.

c) Diskriminanta e funksionit katror të dhënë $D < 0$ prej ku vijon se funksioni katror i dhënë nuk ka zero.

Funksioni katror i dhënë $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, mund ta shkruajmë në **formën kanonike**

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

prej ku fitojmë

$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Pasi, për çdo numër real x , $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$, shenja e shprehjes $a \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ varet vetëm prej shenjës së koeficientit a . T'i shqyrtojmë këto dy raste:

a) Për $a > 0$ funksioni katror pranon vlerën më të vogël

$$\frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ e cila arrihet për } x = -\frac{b}{2a}.$$

Funksioni katror monotonisht zvogëlohet në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ dhe monotonisht rritet në intervalin $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty \right)$.

Bashkësia e vlerave është intervali $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right)$, përkatësisht

$$V_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right).$$

b) Për $a < 0$ funksioni katror pranon vlerë më të madhe

$$\frac{4ac - b^2}{4a} \text{ që arrihet për } x = -\frac{b}{2a}.$$

Funksioni katror monotonisht rritet në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ dhe monotonisht zvogëlohet në intervalin $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Bashkësia e vlerave është intervali $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$, përkatësisht

$$V_f = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Pika

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

quhet **kulmi** i funksionit katror të dhënë.

Shembulli 3. a) Funksioni katror $f(x) = x^2 - 8x + 12$, për $x = 4$ pranon vlerë më të vogël -4 , dhe e ka kulmin $T(4, -4)$.

Funksioni katror monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 4)$ dhe monotonisht rritet në intervalin $(4, +\infty)$. Bashkësia e vlerave $V_f = [-4, +\infty)$.

b) Funksioni katror $f(x) = -x^2 + x + 6$, për $x = \frac{1}{2}$ pranon vlerën më të madhe $f(x) = \frac{25}{4}$, ka edhe kulm $T\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Funksioni katror monotonisht rritet në intervalin $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ dhe monotonisht rritet në intervali $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Bashkësia e vlerave $V_f = \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$.

Shembulli 4. Ta shqyrtojmë funksionin katror $f(x) = x^2 - 8x + 7$. Me zgjidhjen e barazimit katror përkatës kemi se funksioni ka zero $x_1 = 1$ dhe $x_2 = 7$. Kulmi i tij është në pikën $T = T(4, -9)$.

Tabela e vlerave të disa vlerave të ndryshore x është:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0
pika	P	N_1			T			N_2

Nëse i lidhim me vijë të vijueshme pikat koordinatat e të cilave janë dhënë te tabela, do ta ftojmë përafërsisht grafikun e funksionit katror të dhënë si te figura 1.

Në rastin e përgjithshëm grafiku i një funksioni katror është vijë e lakuar e cila quhet **parabolë**. Poashtu, në pajtim me diskutimin e sipërm të cili konstatuam intervallet e monotonisë, kulmin dhe bashkësinë e vlerave të funksionit katror, mund të vërejmë se për $a > 0$ parabola është e hapur lartë, por për $a < 0$ parabola është e hapur poshtë.

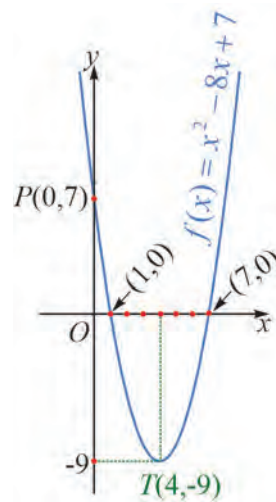


Figura 1

Shembulli 5. Paraqiti në sistemin koordinativ të njëjtë grafikët e këtyre funksioneve:

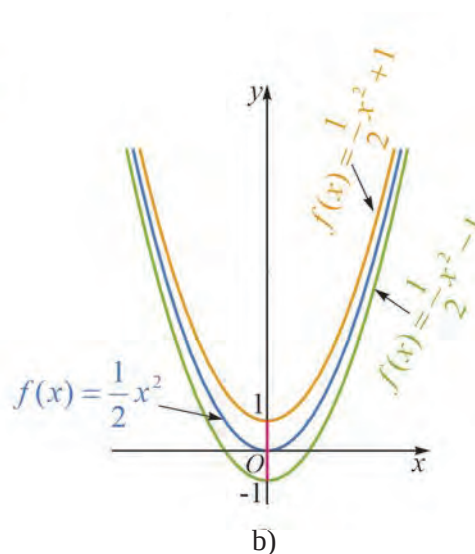
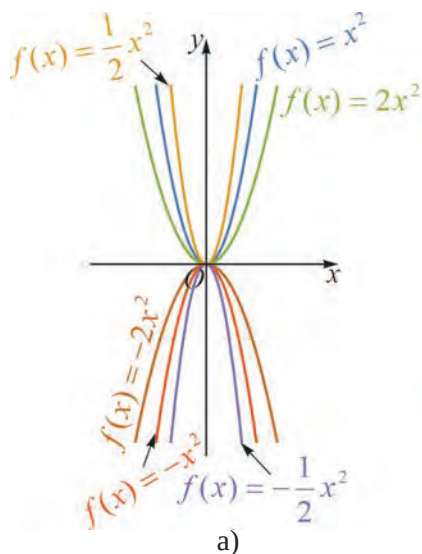
a) $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x) = -2x^2$,

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$;

c) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$, $f(x) = (x-1)^2$;

c) $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 2x^2 - 1$, $f(x) = 2(x-3)^2 - 1$.



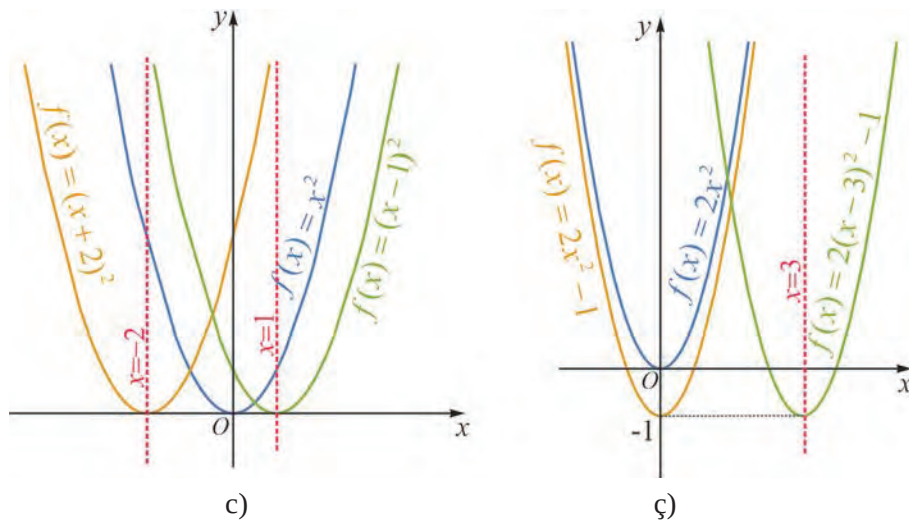


Figura 2

Detyra

1. Shkruaj këto funksione katrore në formën kanonike:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ c) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

2. Gjeji zerot e funksioneve katrore:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ b) $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$ c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

3. Gjeji koordinatat e kulmeve të këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ c) $f(x) = x^2 - 16x + 68$.

4. Gjeji intervalet e monotonisë të këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $f(x) = -3x^2 - 12x - 9$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

5. Gjeji bashkësinë e vlerave të këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ b) $2f(x) = 2x^2 + 4x + 8$ c) $f(x) = -3x^2 + 3x + 15$.

6. Vizato grafikonet e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ b) $f(x) = -4x^2 + 1$ c) $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.

7. Janë dhënë funksionet katrore $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$ dhe $g(x) = -x^2 - 4x - 8$.

a) Transformoji funksionet në formën kanonike;

b) Skico grafikët e funksioneve f dhe g .

9.4. Funksionet e fuqive

Funksioni i formës $f(x) = x^p$, ku p është numër real quhet **funksion fuqie**.

Funksionin e fuqisë do ta shqyrtojmë në këto raste:

1⁰. Nëse treguesi p është numër natyror çift, atëherë funksioni është i formës

$$f(x) = x^{2n}, n \text{ është numër natyror.}$$

Disa veti të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit. $D_f = \mathbb{R}$.
- Bashkësia e vlerave $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Funksioni zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe rritet në intervalin $(0, +\infty)$.
- Funksioni ka zero në $x = 0$.
- Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me boshtin y , dhe kalon nëpër pikat $(-1,1)$, $(0, 0)$ dhe $(1,1)$.

Shembulli 1. Te figura 1 janë paraqitur funksionet $f(x) = x^2$ dhe $g(x) = x^4$.

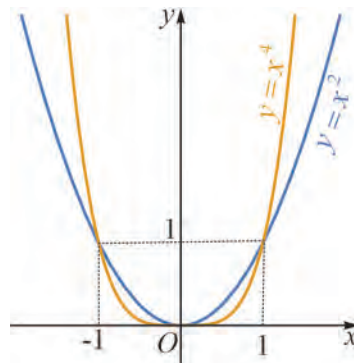


Figura 1

2⁰. Nëse treguesi p është numër natyror tek, atëherë funksioni është i formës

$$f(x) = x^{2n-1}, n \text{ është numër natyror.}$$

Disa prej vetive të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R}$.
- Bashkësia e vlerave. $V_f = \mathbb{R}$.
- Funksioni rritet në gjithë drejtëzën reale.
- Funksioni ka zero në $x = 0$.
- Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave, dhe kalon nëpër pikat $(-1, -1)$, $(0, 0)$ dhe $(1,1)$.

Shembulli 2. Te figura 2 janë paraqitur funksionet $f(x) = x^3$ dhe $g(x) = x^5$.

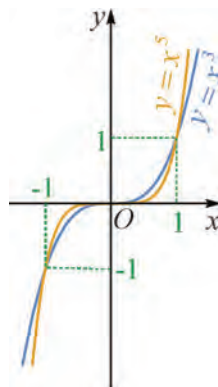


Figura 2

3⁰. Nëse treguesi p është numër i plotë negativ, atëherë funksioni është i formës

a) $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, n është numër natyror.

Disa veti të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Bashkësia e vlerave. $V_f = \mathbb{R}^+$.
- Funksioni rritet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$.
- Funksioni nuk ka zero.
- Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me boshtin y , dhe kalon nëpër pikat $(-1,1)$ dhe $(1,1)$.

kat $(-1,1)$ dhe $(1,1)$.

Shembulli 3. Te figura 3 janë paraqitur funksionet $f(x) = \frac{1}{x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{x^4}$.

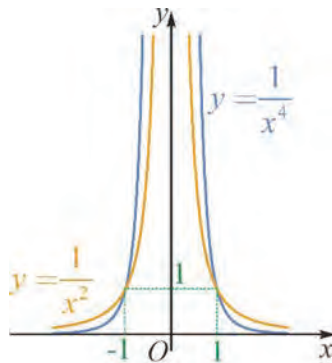


Figura 3

b) $f(x) = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, n është numër natyror (figura 4).

Disa veti të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Bashkësia e vlerave $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funksioni zvogëlohet në gjithë fushën e përkufizimit.
- Funksioni nuk ka zero.
- Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave, dhe kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1,1)$.

Shembulli 4. Te figura 4 janë paraqitur funksionet $f(x) = \frac{1}{x}$ dhe $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

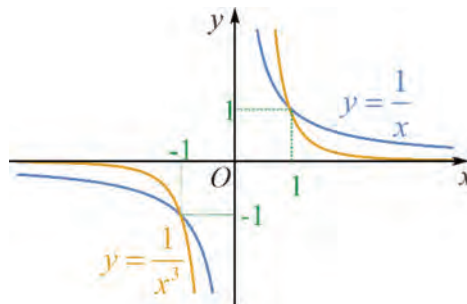


Figura 4

4⁰. Nëse treguesi p është numër pozitiv racional, përkatësisht $p = \frac{m}{n}$, ku m dhe n janë reciprokisht numra natyror të thjeshtë, atëherë funksioni është i formës

a) $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, n është numër natyror.

Disa veti të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Bashkësia e vlerave $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Funksioni rritet në gjithë fushën e përkufizimit.
- Funksioni ka zero në $x = 0$.
- Grafiku i funksionit kalon nëpër pikat $(1,1)$.

b) $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, n është numër tek.

Disa veti të funksionit janë:

- Fusha e përkufizimit $D_f = \mathbb{R}$.
- Bashkësia e vlerave $V_f = \mathbb{R}$.
- Funksioni rritet në gjithë fushën e përkufizimit.
- Funksioni ka zero në $x = 0$.
- Grafiku i funksionit kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1,1)$.

Shembulli 5. Te figura 5 janë paraqitur funksionet $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x^3}$ dhe $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

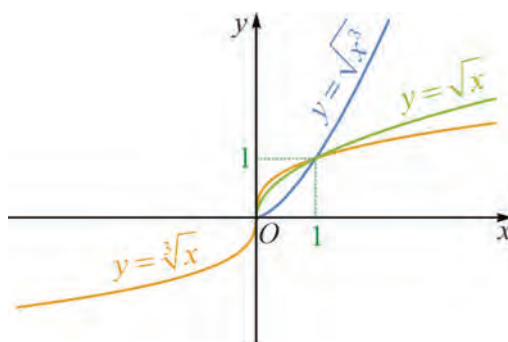


Figura 5

Detyra

Shkruaj vetitë dhe vizato në sistemin koordinativ të njëjtë grafikët e këtyre funksioneve:

1. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ dhe $f(x) = x^8$.
2. $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ dhe $f(x) = x^7$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ dhe $f(x) = \frac{1}{x^6}$.
4. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = \frac{1}{x^5}$ dhe $f(x) = \frac{1}{x^7}$.

5. $f(x) = \sqrt{x^3}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$ dhe $f(x) = \sqrt[8]{x^3}$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ dhe $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

9.5. Funksioni eksponencial

Funksioni i formës

$$f(x) = a^x, a > 0 \text{ dhe } a \neq 1,$$

quhet **funksion eksponencial**.

Kufizim $a \neq 1$ te përkufizimi është i nevojshëm për shkak të faktit se për $a = 1$ funksioni $f(x) = a^x = 1^x = 1$ është funksion konstant që i takon klasës së funksioneve eksponenciale.

Shembulli 1. Funksionet $f(x) = 2^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = 0,25^x$, $f(x) = (\sqrt{5})^x$ janë shembuj të funksioneve eksponenciale.

Me shfrytëzimin e vetive të fuqisë me tregues real, arrijmë deri te këto veti të funksionit $f(x) = a^x$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$.

- Për $a > 0$ dhe $a \neq 1$, fuqia a^x është përkufizuar për çdo vlerë të x . Prandaj, fusha e përkufizimit D_f të funksionit eksponencial është bashkësia e numrave real, përkatësisht $Df = \mathbb{R}$.

- Pasi $a^x > 0$ për çdo numër real x dhe për $a > 0$, $a \neq 1$, $A > 0$ ekziston numër real i vetëm x , ashtu që $a^x = A$, kemi se bashkësia e vlerave të funksionit eksponencial përbëhet prej të gjitha numrave real pozitiv përkatësisht, $V_f = \mathbb{R}^+$.

- Pasi $a^x > 0$ për çdo numër real x , mund të përfundojmë se funksioni eksponencial nuk ka zero.

- Për $a > 1$, prej $x_1 < x_2$ vijon se $a^{x_1} < a^{x_2}$, dhe për $0 < a < 1$, prej $x_1 < x_2$ vijon se $a^{x_1} > a^{x_2}$. Kjo do të thotë se për $a > 1$ funksioni është monotono rritës në bashkësinë e numrave real, kurse për $0 < a < 1$ funksioni është monotono zvogëlues në bashkësinë e numrave real.

Shembulli 2. T'i shprehim vetitë e funksionit $f(x) = 2^x$.

Fusha e përkufizimit Df Të funksionit është bashkësia e numrave real, përkatësisht $Df = \mathbb{R}$, kurse bashkësia e vlerave të funksionit përbëhet prej të gjitha numrave real pozitiv, përkatësisht $V_f = \mathbb{R}^+$.

Funksioni nuk ka zero.

Pasi $2 > 1$ funksioni është monotono rritës në bashkësinë e numrave real.

Shembulli 3. Ta gjejmë fushën e përkufizimit të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; **b)** $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$; **c)** $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$.

a) Fusha e përkufizimit është bashkësia e numrave real, përkatësisht $D_f = \mathbb{R}$.

b) Thyesa $\frac{1}{x}$ është përkufizuar për të gjithë numrat realë $x \neq 0$, prandaj $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Rrënja katrore është përkufizuar për numrat realë jonegativ, prandaj $D_f = [0, +\infty)$.

Shembulli 4. Shqyrto monotoninë e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 3^x$; **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; **c)** $f(x) = 0, 7^{x+2}$; **d)** $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Funksionet nën a) dhe d) janë monotono rritës, pasi baza e fuqisë është më e madhe se 1, kurse funksionet nën b) dhe c) janë monotone zvogëluese pasi baza e fuqisë është numër real ndërmjet 0 dhe 1.

Shembulli 5. Ta vizatojmë grafikun e funksionit $f(x) = 2^x$.

Gjejmë disa pika prej grafikut me ndihmën e tabelës

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

Pastaj ato i bartim te sistemi kënddrejtë koordinativ i zgjedhur xOy .

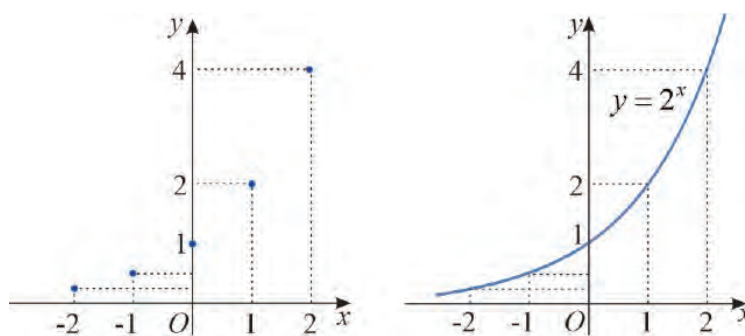


Figura 1

Nëse bartim më shumë pika, duke pasur parasysh se funksioni është monotono rritës, fitojmë parafytyrim për grafikun e tij (figura 1).

Të vërejmë se kur vlerat e x në pakufi zvogëlohen. Vlerat përkatëse të funksionit ngelin pozitive, zvogëlohen dhe asnjëherë nuk arrijnë vlerën zero. Kjo do të thotë se grafiku i funksionit afrohet kah boshti x , kurse asnjëherë nuk do ta pret as ta prek bosh-tin x . Atëherë themi se boshti x është **asimptota** e funksionit $f(x) = 2^x$.

Shembulli 6. Ta vizatojmë grafikun e funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Gjejmë disa pika prej grafikut të tij:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Pikat e fituara i bartim te sistemi kënddrejtë koordinativ të dhënë xOy . Duke i lidhur pikat me vijë të vijueshme, e fitojmë grafikun e funksionit (figura 2).

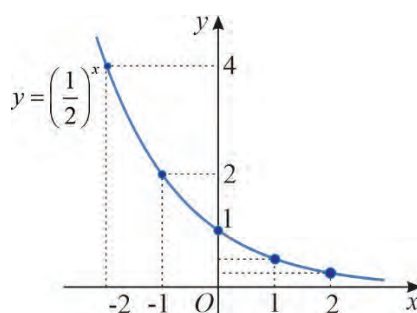


Figura 2

Të vërejmë se kur vlerat e x pakufi rriten, vlerat përkatëse të funksionit ngelin pozitive, zvogëlohen dhe asnjëherë nuk arrijnë vlerë zero. Kjo do të thotë se grafiku i funksionit afrohet kah boshti x , kurse asnjëherë nuk do ta pret boshtin x . Atëherë themi se boshti x është **asimptota** e funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

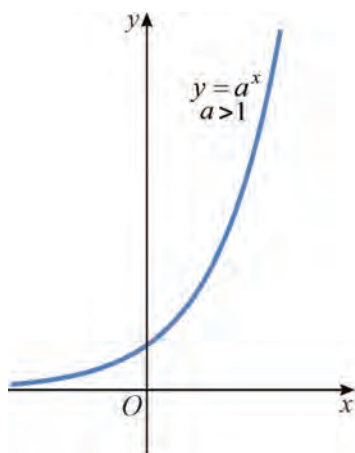


Figura 3



Figura 4

Përfundimi prej shembujve paraprak vlejnë edhe në rastin e përgjithshëm. Për $a > 1$ nëse vlerat e x në pakufi zvogëlohen, vlerat përkatëse të funksionit ngelin pozitive, zvogëlohen dhe asnjëherë nuk arrijnë vlerën zero, përkatësisht boshti x është **asimptota** e funksionit $f(x) = a^x$ (figura 3).

Ngjashëm, për $0 < a < 1$ nëse vlerat e x në pakufi rriten, përkatësisht vleratave

funksionit ngelin pozitive, zvogëlohen dhe asnjëherë arrijnë vlerën zero, përkatësisht boshti x është **asimptota** e funksionit $f(x) = a^x$ (figura 4).

Shembulli 7. Ta vizatojmë në sistemin koordinativ të njëjtë grafikët e funksioneve

a) $f(x) = 2^x$ dhe $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

b) $f(x) = 3^x$ dhe $f(x) = \log_5(x-1)$.

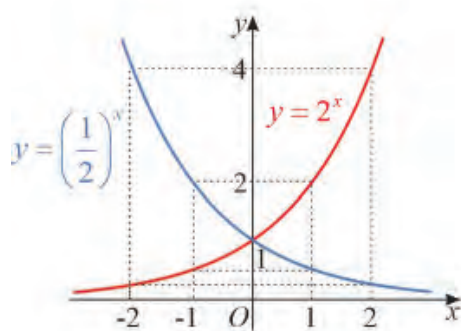


Figura 5

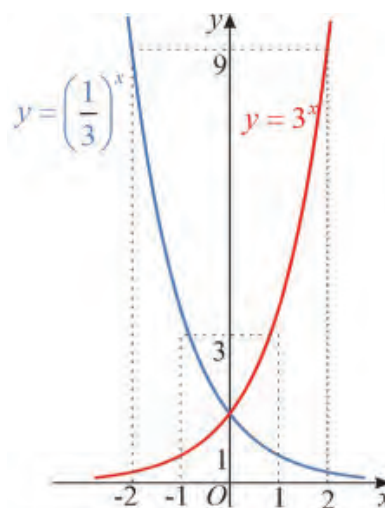


Figura 6

Vërejmë se grafikët e funksioneve $f(x) = 2^x$ dhe $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ janë simetrike në lidhje me boshtin y (figura 5). Me të vërtetë, nëse pika $M(x, y)$ i takon grafikut të funksionit $f(x) = 2^x$ atëherë $N(-x, y)$ i takon grafikut $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, pasi $2^x = 2^{-(-x)} = \frac{1}{2^{-x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

Ngjashëm, grafikët e funksioneve $f(x) = 3^x$ dhe $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ janë simetrike në lidhje me boshtin y (figura 6).

Vështrimet prej shembullit të fundit vlejnë për çfarëdo dy funksione eksponenciale $f(x) = a^x$ dhe $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Me të vërtetë, nëse pika $M(x, y)$ i takon grafikut të funksionit $f(x) = a^x$ atëherë $N(-x, y)$ i takon grafikut të funksionit $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, pasi $a^x = a^{-(-x)} = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Shembulli 8. Te figura 7 dhe figura 8 janë vizatuar grafikët e disa funksioneve eksponenciale:

a) $f(x) = a^x$ për $a > 1$.

b) $f(x) = a^x$ për $0 < a < 1$

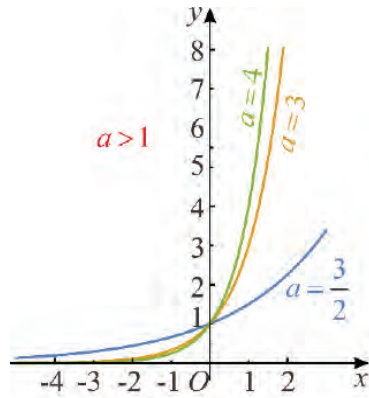


Figura 7

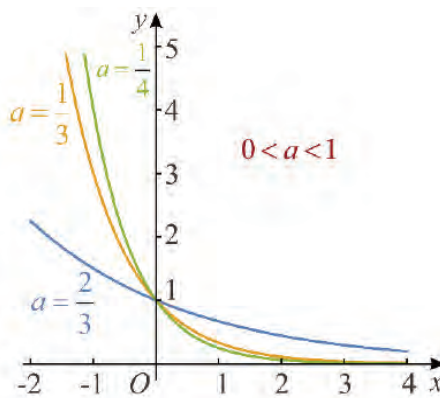


Figura 8

Prej shembujve të sipërm mund të vërejmë se për vlerën e njëjtë $x > 0$, vlerat e funksionit eksponencial $y = a_1x$, $y = a_2x, \dots$, janë në renditje të njëjtë sikurse vlerat $a_1, a_2, \dots$, për $a_1, a_2, \dots > 1$, por në renditje të anasjelltë të $a_1, a_2, \dots$, për $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

Nga ana tjetër, për vlerën e njëjtë $x < 0$, vlerat e funksioneve eksponenciale $y = a_1x$, $y = a_2x, \dots$, janë në renditje të anasjelltë prej renditjes së vlerave $a_1, a_2, \dots$, për $a_1, a_2, \dots > 1$, dhe janë në renditje të njëjtë me vlerat $a_1, a_2, \dots$, për $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

Detyra

1. Cilat prej këtyre funksioneve

a) $f(x) = 5^{x-1}$; **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; **c)** $f(x) = 7^{\frac{1}{x-3}}$; **ç)** $f(x) = 4^{\sqrt{x+2}}$;

janë eksponenciale?

2. Shprehi vetitë e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 3^x$; **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; **c)** $f(x) = 5 \cdot 2^x$; **ç)** $f(x) = 0 \cdot 4^x$.

3. Gjeje fushën e përkufizimit të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 3^{x-2}$; **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; **c)** $f(x) = 4^{\frac{1}{x-1}}$; **ç)** $f(x) = 7^{\sqrt{x+4}}$.

4. Shqyrto monotoninë e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 7^{x+3}$; **b)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; **c)** $f(x) = 0 \cdot 2^{x-1}$; **ç)** $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3}$.

5. Vizato grafikun e funksioneve:

a) $f(x) = 5^x$; **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; **c)** $f(x) = -2^x$; **ç)** $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

9.6. Funksioni logaritmik

Funksioni i formës $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$ quhet **funksion logaritmik**.

Shembulli 1. Funksione logaritmike janë, për shembull, funksionet:

$$f(x) = \log_2 x, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad f(x) = \lg x, \quad f(x) = \ln x.$$

Me ndihmën e përkufizimit për funksion logaritmik $f(x) = \log_a x$ dhe vetive të funksionit eksponencial $f(x) = a^x$, si edhe lidhja

$$\log_a x = f(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} = x$$

arrijmë deri te këto vetë të funksionit logaritmik.

- Fusha e përkufizimit të funksionit logaritmik $f(x) = \log_a x$ është bashkësi $\mathbb{R}^+$, përkatësisht $D_f = \mathbb{R}^+$.
- Bashkësia e vlerave të funksionit logaritmik $f(x) = \log_a x$ është bashkësi e numrave real, përkatësisht $V_f = \mathbb{R}$.
- Numri real $x = 1$ është zero e funksionit logaritmik.
- Funksioni logaritmik $f(x) = \log_a x$, për $a > 1$ monotonisht rritet, kurse për $0 < a < 1$ monotonisht zvogëlohet në gjithë fushën e përkufizimit D_f .

Shembulli 2. T'i shprehim vetitë e funksionit $f(x) = \log_2 x$.

Fusha e përkufizimit të funksionit $D_f = \mathbb{R}^+$.

Bashkësia e vlerave të funksionit $V_f = \mathbb{R}$.

Numri real $x = 1$ është zero e funksionit.

Funksioni monotonisht rritet, pasi $2 > 1$.

Shembulli 3. T'i gjejmë fushat e përkufizimit të funksioneve logaritmike:

$$\text{a) } f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x; \quad \text{b) } f(x) = \lg(x + 3); \quad \text{c) } f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 7);$$

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R}^+$$

$$\text{b) } \text{Prej } x + 3 > 0, \text{ fitojmë se. } D_f = (-3, +\infty)$$

$$\text{c) } \text{Fusha e përkufizimit } D_f = \mathbb{R}^+.$$

Shembulli 4. Ta shqyrtojmë monotoninë e këtyre funksioneve:

$$\text{a) } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x; \quad \text{b) } f(x) = \log_{0,3} (x - 3); \quad \text{c) } f(x) = \log_5 (x^2 + 4).$$

Funksioni nën a) është monotono rritës pasi baza e logaritmeve është më e madhe se 1, kurse funksionet nën b) dhe c) janë monotono zvogëluese pasi baza e logaritmeve është numër real ndërmjet 0 dhe 1.

Shembulli 5. Ta vizatojmë grafikun e funksionit $f(x) = \log_2 x$.

Gjejmë disa pika prej grafikut me ndihmën e tabelës

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Pastaj ato i bartim te sistemi kënddrejtë koordinativ të dhënë xOy . Nëse bartim më shumë pika, duke pas parasysh se $f(x) = \log_2 x$ është funksion monotono rritës, fitojmë parafytyrim për grafikun e tij (figura 1).

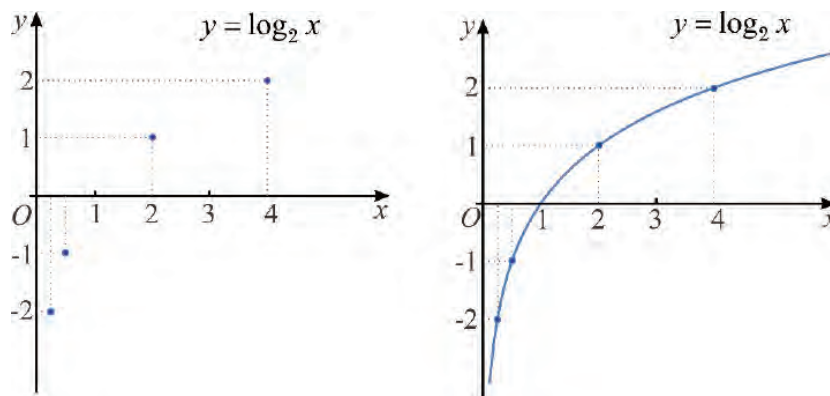


Figura 1

Kur vlerat e x afrohen kah 0, vlerat përkatëse të funksionit në pakufi zvogëlohen, pra grafiku u funksionit afrohet kah boshti y , kurse asnjëherë nuk do ta pret as ta prek boshtin y . Atëherë themi se boshti y është **asimptota** e funksionit $f(x) = \log_2 x$.

Shembulli 6. Ta vizatojmë grafikun e funksionit $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Sikurse edhe te shembull paraprak, gjejmë disa pika prej grafikut me ndihmën e tabelës

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2

Pikat e fituara i bartim te sistemi kënddrejtë koordinativ xOy . Me bartjen e më shumë pikave, duke pasur parasysh se, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ është funksion zvogëlues fitojmë parafytyrim për grafikun e tij (figura 2).

Të vërejmë se kur vlerat e x afrohen kah 0, vlerat përkatëse të funksionit në pakufi rriten. Kjo do të thotë se grafiku i funksionit afrohet kah boshti y , kurse asnjëherë nuk do ta pret as ta prek boshtin y . Atëherë themi se boshti y është **asimptota** e grafikut të funksionit $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

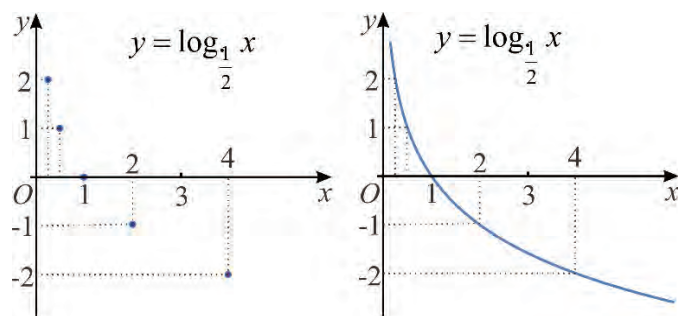


Figura 2

Përfundimi prej shembujve paraprak vlen edhe në rastin e përgjithshëm. Më saktë për $a > 1$, nëse vlerat e x afrohen kah 0, përkatësisht vlerat e Funkcionit në pakufi zvogëlohen, përkatësisht boshti y është **asimptota** e grafikut të funksionit $f(x) = \log_a x$ (figura 3).

Ngjashëm, për $0 < a < 1$ nëse vlerat e x afrohen kah 0, vlerat përkatëse të funksionit në pakufi rriten, përkatësisht boshti y është **asimptota** e grafikut të funksionit $f(x) = \log_a x$ (figura 4).

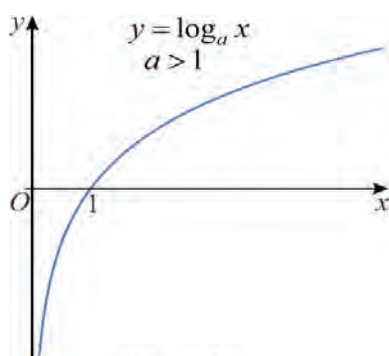


Figura 3

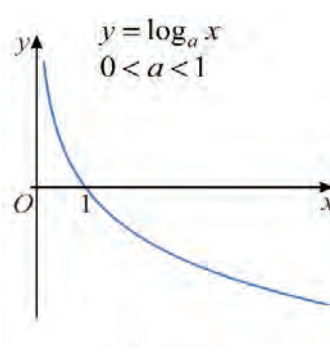


Figura 4

Shembulli 7. T'i vizatojmë grafikët e funksioneve $f(x) = \log_3 x$ dhe $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ në të njëjtin sistem koordinativ.

Ato janë simetrike në lidhje me boshin x , pasi $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$ (figura 5).

Përfundimi prej shembullit paraprak vlen në rastin e përgjithshëm. Prandaj për $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, shkak të barazimit grafikët e funksioneve $f(x) = \log_a x$ dhe $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ janë simetrike në lidhje me boshtin x .

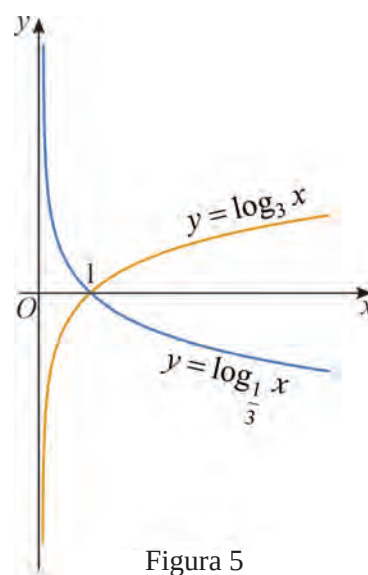


Figura 5

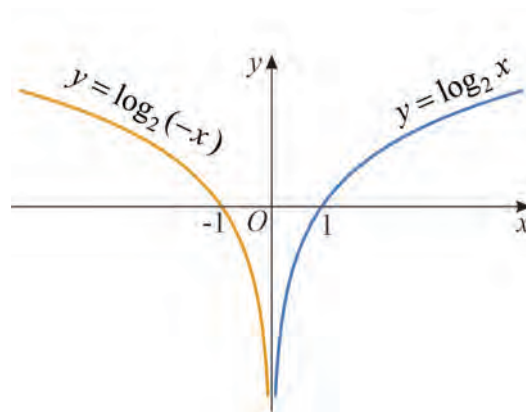


Figura 6

Shembulli 8. Nëse i vizatojmë në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve $f(x) = \log_2 x$ dhe $f(x) = \log_2(-x)$, do të vërejmë se ato janë simetrike në lidhje me boshtin y (figura 6).

Përfundimi prej shembujve paraprak vlen edhe në rastin e përgjithshëm, përkatësisht Grafikët e funksioneve $f(x) = \log_a x$ dhe $f(x) = \log_a(-x)$ janë simetrike në lidhje me boshtin y .

Detyra

1. Cilat prej këtyre funksioneve

- a)** $f(x) = \log_5(x-1)$; **b)** $f(x) = \log x$ **c)** $f(x) = 7^{\log x}$;

janë logaritmike?

2. Shprehi vetitë e këtyre funksioneve logaritmike:

- a)** $f(x) = \log_5 x$; **b)** $f(x) = \log_{0,3} x$; **c)** $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$.

3. Gjeje fushën e përkufizimit të këtyre funksioneve logaritmike:

- a)** $f(x) = \log_5 x + 12$; **b)** $f(x) = \lg(x+9)$;
c) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$; **c)** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 + 5x + 2)$.

4. Shqyrto monotoninë e këtyre funksioneve logaritmike:

- a)** $f(x) = -\log_2 x$; **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$; **c)** $f(x) = \ln x$.

5. Vizato grafikun e funksioneve:

- a)** $f(x) = -\log_2 x$; **b)** $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x)$; **c)** $f(x) = \log_2(-x)$.

9.7. Funksioni invers

Kompozicioni $f \circ g$ i funksioneve f dhe g me fushën e përkufizimit D_f dhe D_g përkatësisht, përkufizohet me

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \text{ për çdo } x \in D_{f \circ g}$$

ku $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Në mënyrë analoge, kompozicioni $g \circ f$ i funksioneve g dhe f me fushën e përkufizimit D_g dhe D_f përkatësisht përkufizohet me

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ për çdo } x \in D_{g \circ f}$$

ku $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Shembulli 1. Le të jetë $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ të përkufizuara me $f(x) = 2x$ dhe $g(x) = 3x + 1$.

T'i gjejmë kompozicionet $f \circ g$ dhe $g \circ f$. Kemi se

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2(3x + 1) = 6x + 2, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}, \text{ dhe}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 3(2x) + 1 = 6x + 1.$$

Është e qartë se $f \circ g \neq g \circ f$, përkatësisht për formimin e dy funksioneve në rastin e përgjithshëm nuk vlen ligji komutativ.

Nëse funksionet f dhe g i plotësojnë kushtet:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \text{ për çdo } x \in D_f, \text{ dhe}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y, \text{ për çdo } y \in D_g \quad (1)$$

atëherë themi se f është **funksion invers** i funksionit g dhe g është funksion invers i funksionit f .

Shembulli 2. Të kontrollojmë se funksioni $f(x) = x^3 + 1$ është funksion invers i funksionit $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ pasi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = x, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}, \text{ dhe}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y, \text{ për çdo } y \in \mathbb{R}.$$

Mund të tregohet se nëse f ka funksion invers, atëherë ai është i vetmi. Për këtë shkak lejohet funksioni invers i f ta shënojmë me f^{-1} . Tani, barazimi (1) e ka formën

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \text{ për çdo } x \in D_f, \text{ dhe}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \text{ për çdo } y \in D_{f^{-1}} \quad (2)$$

Nëse dëshirojmë t'i vizatojmë grafikët e funksioneve f dhe f^{-1} në sistemin e njëjtë koordinativ, atëherë duhet të llogarisim se x është ndryshore e pavarur x e ndryshore e pavarur për të dy funksionet. Në këtë kuptim, për t'i vizatuar grafikët e funksioneve $f(x) = x^3 + 1$ dhe $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ në sistemin e njëjtë koordinativ, e zëvendësojmë ndryshoren e panjohur y me funksioneve x , dhe i vizatojmë grafikët e

$$y = x^3 + 1 \text{ dhe } y = \sqrt[3]{x-1}$$

Pas kësaj marrëveshje barazimet (2) marrin formën

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \text{ për çdo } x \in D_f \text{ dhe}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \text{ për çdo } x \in D_{f^{-1}} \quad (3)$$

Barazimet (3) i sjellin këto lidhje ndërmjet fushave të përkufizimit dhe bashkësitë e vlerave të f dhe f^{-1}

$$D_{f^{-1}} = V_f \text{ dhe } V_{f^{-1}} = D_f$$

Me të vërtetë, barazimi i parë te (3) tregon se f^{-1} është përkufizuar në $f(x)$ për çdo x prej fushës së përkufizimit të f , dhe kjo tërheq se bashkësia e vlerave f është nënbashkësi prej fushës së përkufizimit të f^{-1} .

Anasjelltas, nëse x është në fushën e përkufizimit të f^{-1} , atëherë barazimi i dytë te (3) tërheq se x është në vlerave të f . Prandaj, fusha e përkufizimit të f^{-1} është nënbashkësia e bashkësisë së vlerave të f .

Vërtetimi i barazimit të dytë realizohet në mënyrë analoge.

Përveç kësaj, ndryshorja e pavarur të funksionit të dhënë është ndryshorja e funksionit të tij invers, kurse ndryshorja e funksionit të dhënë është ndryshorja e pavarur e funksionit të tij invers. Prandaj mund të shkruajmë

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Prej këtu del kjo mënyrë praktike për gjetjen e funksionit invers të funksionit të dhënë. Te formula $y = f(x)$ mjafton vetëm x dhe y t'i ndërrojnë vendet e veta, kurse pas-taj barazimi i këtillë i fituar zgjidhet në lidhje me y që të shprehet si funksion sipas x .

Shembulli 3. Le të jetë dhënë funksioni linear $y = ax + b$. Me zëvendësimin e vendeve të x dhe y fitojmë $x = ay + b$. Nëse barazimin e fituar e zgjidhim sipas y e fitojmë funksionin invers që është përsëri funksion linear: $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.

Shembulli 4. Ta gjejmë funksionin invers të

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

Sipas mënyrës së konstatuar së pari shkruajmë. $y = \sqrt{3x-2}$. Me zëvendësimin e vendeve të x dhe y kemi $x = \sqrt{3y-2}$. Nëse barazimin e fituar e zgjidhim sipas y e fitojmë formulën për funksionin invers $y = \frac{x^2+2}{3}$, përkatësisht $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$. E dim se $D_{f^{-1}} = V_f$ dhe se $V_f = [0, +\infty)$, pra kemi $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$. Kështu kemi se funksioni invers i funksionit të dhënë është

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}, \quad x \geq 0.$$

Të vërejmë se, nëse përcaktohet fusha e përkufizimit të funksionit invers direkt prej formulës, do të fitohet se $D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$, që nuk është e saktë dhe duhet në veçanti të kemi kujdes.

Prej vet përkufizimit të funksionit invers kemi se pika (x, y) i takon grafikut të funksionit të dhënë f nëse dhe vetëm nëse pika (y, x) i takon grafikut të

funksionit të tij invers. Pikat (x, y) dhe (y, x) janë simetrike në lidhje me drejtëzën $y = x$ në rrafshin koordinativ. Prej këtij fitojmë se grafiku i funksionit invers $f^{-1}(x)$ është **simetrike** me grafikun e funksionit $f(x)$ në lidhje me simetralen e kuadrantit I dhe III, përkatësisht në lidhje me drejtëzën $x = y$.

Prej këtij, kurse gjithashtu dhe prej vet përkufizimit, vijon se nëse g është funksion inverse i funksionit f , atëherë f është funksion invers i funksionit g , që do të thotë se ato janë reciprokisht inverse.

Shembulli 5. Funksionet $f(x) = x^2$ dhe $g(x) = \sqrt{x}$ janë reciprokisht inverse në intervalin $[0, +\infty)$. Reciprokisht inverse janë edhe funksionet $f(x) = x^2$ të përkufizuar në intervalin $(-\infty, 0]$ dhe $h(x) = -\sqrt{x}$ të përkufizuar në intervalin $[0, +\infty)$ (figura 1).

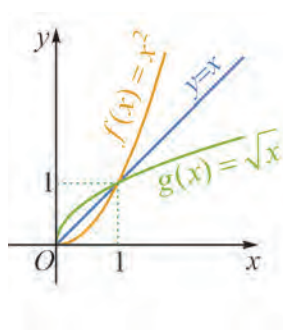


Figura 1

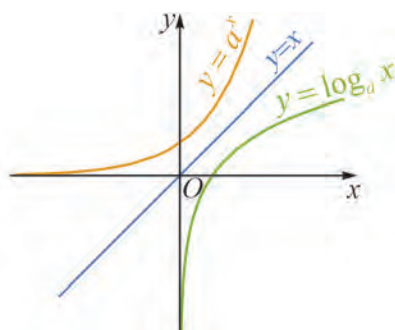


Figura 2

Shembulli 6. Inverse njëra në tjetrën janë edhe funksionet (figura 2)

$$y = a^x \text{ dhe } y = \log_a x$$

Detyra

1. Gjeji kompozicionet $f \circ g$ dhe $g \circ f$, nëse $f(x) = \ln(x+1)$, për çdo $x \in (-1, \infty)$, dhe $g(x) = e^{2x-3}$, për çdo $x \in \mathbb{R}$

2. Gjeje funksionin invers të çdonjëres prej këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 2x + 1$; **b)** $f(x) = 2^x$; **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **ç)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

3. Trego se për funksionin $f(x) = \frac{1+x}{x-1}$ vlen

$$(f \circ f)(x) = x, \text{ për çdo } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

4. Trego se funksioni $f(x) = \frac{1+3x}{x-3}$ është invers me vetveten.

9.8. Koncepti për vargun

Të shqyrtojmë funksionin f prej bashkësisë së numrave natyror në bashkësinë e numrave real. Ai është dhënë nëse janë të njohur vlerat e funksionit $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$

Vargu është funksion prej bashkësisë së numrave natyror në bashkësisë së numrave natyror.

Vargun do ta shkruajmë shkurtimisht me $a_1, a_2, a_3, \dots$ ose edhe shkurtimisht me (a_n) . Poashtu a_n quhet anëtar i përgjithshëm i vargut (a_n) .

Shembulli 1. Shkruaj anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm a_n , nëse:

a) $a_n = \frac{1}{n}$; **b)** $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{n}$; **c)** $a_n = n^{(-1)^n}$;

por pastaj vargjet e dhëna paraqiti grafikisht te boshti numerik.

a) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$.

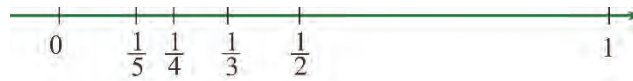


Figura 1

b) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = -\frac{4}{5}$.

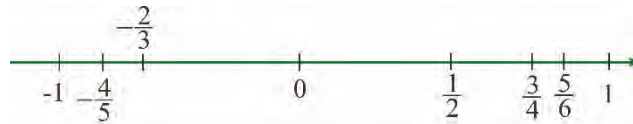


Figura 2

c) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 4, a_5 = \frac{1}{5}$.

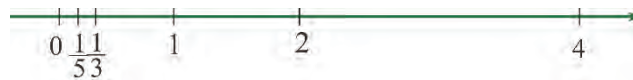


Figura 3

Shembulli 2. Gjeji formulën për anëtarin e përgjithshëm a_n të këtyre vargjeve:

a) $-1, 1, -1, \dots$; **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$; **c)** $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

a) $a_n = (-1)^n$; **b)** $a_n = \frac{1}{2^n}$; **c)** $a_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Vargjet mund të kënaqin disa veti. Ato veti më së shpeshti janë kushtet për rritjen dhe zvogëlimin, si edhe kufizimin e vargjeve.

Për vargun (a_n) themi se është

- **Monotono rritës** nëse $a_{n+1} > a_n$, për çdo numër natyror n
- **Monotono zvogëlues** nëse $a_{n+1} < a_n$, për çdo numër natyror n .

Kushti për rritje monotone të një vargu tregon se çdo anëtar vijues i vargut është më i madh se anëtar i paraprak, për shembull, vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 5n - 2$ është rritës, pasi $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ përkatësisht $1 < 4 < 7 < \dots$. Drejtpërdrejt konstatohet se

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - 2 - [5n - 2] = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5 > 0$$

pra prej këtu përfundojmë se $a_{n+1} > a_n$, për çdo numër natyror n .

Kushti për zvogëlimin e një vargu tregon se çdo anëtar vijues i vargut është më i vogël se anëtari paraprak.

Shembulli 3. Për shembull, vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ është zvogëlues, pasi

$a > a > a > \dots$, përkatësisht $2 > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{9} > \dots$ Drejtpërdrejt bindemi se

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

pra prej këtu vijon se $a_{n+1} < a_n$ për çdo numër natyror n

Të përmendim se çdo varg patjetër të plotëson disa prej vetive të sipërme. Kështu është vargu 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2,....

Për një varg themi se është **i kufizuar prej lartë**, nëse ekziston numër real M , ashtu që

$$a_n < M, \text{ për çdo numër natyror } n.$$

Në mënyrë analoge përkufizojmë varg të kufizuar prej poshtë në këtë mënyrë.

Për një varg themi se është **i kufizuar prej poshtë**, nëse ekziston numër real M , ashtu që

$$a_n > M, \text{ për çdo numër natyror } n$$

Vargjet të cilat njëkohësisht janë të kufizuar prej lart dhe prej poshtë i quajmë vargje të kufizuara. Ato mundemi t'i përkufizojmë në këtë mënyrë.

Për një varg themi se është **i kufizuar**, nëse ekziston numër real M , ashtu që

$$|a_n| < M, \text{ për çdo numër natyror } n.$$

Shembulli 4. a) Vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3^n$ është i kufizuar prej poshtë, për shembull, me numrin 0, por nuk është i kufizuar prej lartë.

b) Vargu $-1, 1, -2, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}, -4, \frac{1}{4}, -5, \frac{1}{5}, \dots$ është i kufizuar prej lartë me numrin 2, por nuk është i kufizuar prej poshtë.

c) Vargu $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{n}$ është i kufizuar edhe prej lartë edhe prej poshtë, çfarëdo numër më i madh se numri 1, pasi $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n(n-1)}{n} \right| = \frac{n-1}{n} \leq 1$.

Shembulli 5. Ta shqyrtojmë vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3n - 2$. Ky varg është rritës, pasi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$. Në këtë rast anëtari i parë është $a_1 = 1$ dhe ai është anëtari më i vogël te vargu, prandaj ky varg është i kufizuar prej poshtë me çfarëdo numër më i vogël se 1, për shembull 0.

Vargu i cili nuk është i kufizuar quhet **i pakufizuar**. Me tjera fjalë, vargu (a_n) është kufizuar nëse për çdo numër real M ekziston numër natyror n , ashtu që $|a_n| \geq M$.

Detyra

1. Gjeji të paktën një formulë për anëtarin e përgjithshëm a_n të këtyre vargjeve:

a) 2, 5, 8, 11, 14... b) $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5} \dots$ c) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \dots$

2. Cilat vargje themi se janë rritëse, kurse cilat janë zvogëluese?

3. Trego se vargu me anëtarin e përgjithshëm a_n është i kufizuar prej lartë:

a) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 1$ b) $a_n = \frac{n^3 + 2}{n^3};$ c) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\log n}.$

4. Trego se vargu me anëtarin e përgjithshëm a_n është i kufizuar prej poshtë:

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n^2};$ b) $a_n = (-1)^n;$ c) $a_n = \frac{n-1}{n}.$

5. Trego se vargu $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$ është i kufizuar.

9.9. Kufiri i vargut

Koncepti për kufirin e vargut

Shembulli 1. Ta shqyrtojmë vargun (a_n) , ku $a_n = \frac{1}{n}$, dhe të paraqesim te boshti real disa anëtar fillestar të tij (figura 1).

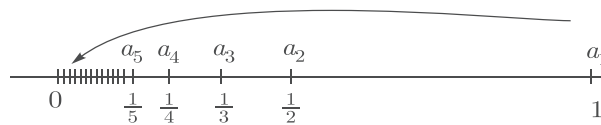


Figura 1

Mund të vërejmë se pikat të cilat u përgjigjen këtyre anëtarëve prej vargut “lëvizin” prej 1 kah zeroja, që nuk është anëtar i vargut.

Nëse marrim ε , për shembull, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, te rrethina ε e 0 domethënë intervali $(-\varepsilon, \varepsilon)$ do të gjenden anëtarët $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$, dhe ato janë pakufi shumë anëtar (figura 2).

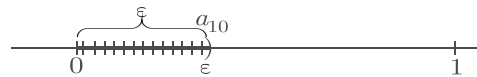


Figura 2

Jashtë kësaj rrethine ε ka 10 anëtar. Në rastin e këtillë themi se vargu grumbullohet rreth pikës $a = 0$.

Përkufizimi 1. Pika $a \in \mathbb{R}$ quhet **pika e grumbullimit** për vargun (a_n) nëse te rrethina e saj ε gjenden pakufi shumë anëtar prej vargut.

Me tjera fjalë, nëse për çdo $\varepsilon > 0$, vlen $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, për pakufi shumë $n \in \mathbb{N}$ domethënë $|a_n - a| < \varepsilon$, për pakufi shumë $n \in \mathbb{N}$.

Shembulli 2. a) Për vargun (a_n) , me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2$, pika e grumbullimit është numri 2 pasi të gjithë anëtarët e vargut janë në çfarëdo rrethinë të pikës 2.

b) Vargu (a_n) , me anëtarin e përgjithshëm $a_n = n^2$, nuk ka pika të grumbullimit pasi anëtarët e tij pafund zmadhohen.

c) Për vargun (a_n) , me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n$, pika të grumbullimit janë numrat -1 dhe 1 pasi në çfarëdo rrethinë prej numrave ka pafund shumë anëtar të vargut.

Sikurse vërejtëm te shembulli 1, për vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n}$ në mënyrë intuitive është e qartë se për numra të mëdhenj të indeksit n , anëtari n i vargut është afër pranë 0, ashtu sikurse n rritet, $a_n = \frac{1}{n}$ është më afër pranë. numri 0 (figura 1). Këtë fakti mund ta sqarojmë në këtë mënyrë.

Për çdo numër pozitiv ε ekziston numër natyror n_0 , ashtu që $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, përkatësisht $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Për shembull, nëse $\varepsilon = 0,01$ atëherë $n_0 > \frac{1}{0,01} = 100$, nëse është $\varepsilon = 0,001$ atëherë $n_0 > \frac{1}{0,001} = 1000$. Tani për çfarëdo numër $n > n_0$ vlen

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

që do të thotë se $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, përkatësisht për vlera të mëdha të n vlen $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$.

Në këtë rast themi se vargu konvergjon (tenton) kah numri 0.

Në rastin e përgjithshëm, nëse vargu tenton kah ndonjë numër a , atëherë do të duhej për çfarëdo numër të vogël pozitiv ε , të ekziston numër n_0 , ashtu që për $n > n_0$ të vlen $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, përkatësisht të gjithë anëtarët a_n që u përgjigjen për këto vlera të n të ndryshojnë prej a sipas vlerës absolute më vogël prej ε .

Shembulli i dhënë e motivon futjen e konceptit kufiri i vargut.

Përkufizimi 2. Numri real a quhet **vlere kufitare** ose **kufiri** i vargut të numrave real (a_n) nëse çdo numër pozitiv ε ekziston numër natyror n_0 , ashtu që

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ për çdo } n \geq n_0$$

dhe shkruajmë $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Domethënë

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Të vërejmë se te përkufizimi i vlerës kufitare të zeros kërkohet duke filluar prej ndonjë n_0 të gjithë anëtarët e vargut të jenë në rrethinën ε në kufirin a . Për dallim prej kësaj te përkufizimi i pikës së grumbullimit nuk kërkohet të gjithë anëtarët të jenë në rrethinën ε , kurse atje të ketë pakufi shumë anëtar të vargut. Kuptohet, edhe jashtë rrethinës ε mund të ketë pafund shumë anëtar të vargut të dhënë. Poashtu nëse numri real a është vlere kufitare e vargut, atëherë a është pika e vetme e grumbullimit të atij vargu.

Vargjet konvergjente

Nëse për vargun (a_n) kemi se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atëherë themi se ai tenton kah numri a kur n tenton kah ∞ dhe shkruajmë $a_n \rightarrow a$, kur $n \rightarrow \infty$, kurse për vet vargun (a_n) themi se është **konvergjent**. Me tjera fjalë, vargu (a_n) tenton kah numri a kur n tenton kah ∞ , nëse anëtarët a_n janë “afër çfarëdo” deri te numri a kur n është “mjaft i madh”.

Prej përkufizimit të vlerës absolute të numrit real vijon se pabarazimi

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

te përkufizimi për vlerën kufitare të vargut është ekuivalent, e pabarazimin e dyfishtë $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, përkatësisht kushti

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Intervali $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ zakonisht quhet rrethina ε e numrit a . Prandaj përkufizimin e vargut mund ta interpretojmë në këtë mënyrë:

Vargu (a_n) tenton kah numri a nëse për çfarëdo numër pozitiv ε ekziston numër natyror n_0 , ashtu që $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ për çdo numër natyror $n \geq n_0$.

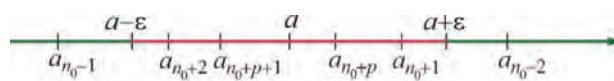


Figura 3

Atëherë themi se duke filluar prej rrethinës ε e numrit a që do të thotë se të gjithë anëtarët e vargut, përveç shumë anëtarëve të fundshëm, gjenden në rrethinë n_0 të gjithë anëtarët e vargut gjenden në ε të numrit a (figura 3).

Shembulli 2. Vargu me anëtarin e përgjithshëm $an = c$, ku c është numër real, konvergjon kah numri c . Me të vërtetë, në këtë rast për çfarëdo $\varepsilon > 0$, numri i kërkuar n_0 është 1.

Shembulli 3. Do të vërtetojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Me të vërtetë, për çdo numër pozitiv ε ekziston numër natyror n_0 , ashtu që $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, përkatësisht $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Atëherë kemi se

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ për çdo numër natyror } n \geq n_0.$$

Poashtu, për $\varepsilon = \frac{1}{100}$, prej pabarazimit $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ vijon se $n > 100$. Prandaj, 100 anëtar prej vargut janë jashtë prej intervalit $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$.

Shembulli 4. Do të vërtetojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Për çdo numër pozitiv ε ekziston numër natyror ashtu që $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Atëherë

$$|a_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ e për çdo } n \geq n_0.$$

Vargje divergjente

Të kthehemi te përkufizimi për vlerën kufitare të vargut. Nëse për vargun e numrave e numrave real (a_n) nuk ekziston kufi, atëherë themi se vargu **divergjon**. Domethënë, vargu (a_n) divergjon nëse për çdo numër real a ekziston rrethinë ε të numrit a ashtu që pafund shumë anëtar të vargut janë jashtë rrethinës, dhe atëherë vargu nuk ka kufi.

Shembulli 5. Vargu 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... nuk konvergjon kah asnjë numër real. Në mënyrë intuitive mund të themi se ky varg tenton në pakufi. Shkaku për atë është kjo që vijon. Qoftë çfarëdo numër të madh M të zgjedhim, do të ekziston numër n_0 që varet prej M , ashtu që nëse $n > n_0$, atëherë do të vlen $an > M$. Për vargun tonë $an = n$, numri n_0 lehtë përcaktohet. Për shembull, për $M = 100$, $n_0 = 101$, nëse $M = 1000$, $n_0 = 1001$, etj.

Për çdo numër real M ekziston numër natyror n_0 , ashtu që

$$a_n > M, \text{ për çdo } n \geq n_0$$

atëherë themi se vargu (a_n) **tenton në pakufi** dhe shkruajmë

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Domethënë, kemi se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Në mënyrë analoge, për çfarëdo numër real M ekziston numër natyror n_0 , ashtu që

$$a_n < M, \text{ për çdo } n \geq n_0$$

atëherë themi se vargu (a_n) **tenton në minus pakufi** dhe shkruajmë

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Domethënë, kemi se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M).$$

Shembulli 6. Për shembull, vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = -\sqrt{n}$ tenton kah $-\infty$.

Në rastin kur $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ose $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, themi se vargjet përkatëse janë divergjente, pasi nuk konvergojnë kah ndonjë numër real.

Shembulli 7. Vargu $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n$ nuk ka kufi.

Me të vërtetë, numri 1 nuk mund të jetë kufi i vargut të dhënë, pasi anëtarët me indeks çift nuk mund t'i takojnë ndonjë rrethine të vogël, për shembull për $\varepsilon = 1$, të numrit 1.

Në mënyrë analoge edhe numri -1 nuk mund të jetë kufiri i vargut të dhënë, pasi anëtarët me indeks tek nuk mund t'i takojnë ndonjë rrethine të vogël, për shembull për $\varepsilon = 1$, të numrit -1 .

Çfarëdo numër a që është më i madh se 1 nuk mund të jetë kufiri pasi nëse marrim $\varepsilon = a - 1 > 0$, atëherë asnjë anëtar prej vargut nuk i takon rrethinës ε të numrit a .

Çfarëdo numër a që është më i vogël se -1 nuk mund të jetë kufiri pasi nëse marrim $\varepsilon = -1 - a > 0$, atëherë asnjëri anëtar i vargut nuk i takon rrethinës ε të numrit a .

Çfarëdo numër a që është më i madh se -1 por më i vogël se 1 nuk mund të jetë kufiri i vargut, pasi nëse marrim për të qenë më i vogli prej numrave $1 - a$ dhe $a - (-1) = a + 1$, atëherë asnjëri anëtar prej vargut nuk i takon rrethinës të numrit a (bëj vizatim).

Domethënë asnjë numër real nuk mund të jetë kufiri i vargut të dhënë, pra vargu i dhënë nuk ka kufi.

Detyra

1. Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Trego se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, por pastaj gjeje n_0 , nëse

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$;

b) $\varepsilon = \frac{1}{100}$;

c) $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

2. Cili prej këtyre vargjeve tenton kah $+\infty$ ose kah $-\infty$, kurse cili kah numri real?

a) $a_n = n - 4$;

b) $a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2}$;

c) $a_n = 2 - n^2$.

3. Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{n+1}{3n+4}$. Trego se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Duke filluar prej cilit n , pafund shumë anëtar të vargut gjenden në intervalin

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{100}, \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \right)?$$

4. Vargu 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, ... a ka kufi?

5. Nëse vargu (a_n^2) ka kufi 1, trego me shembull se vargu (a_n) mund, kurse edhe jo patjetër të ketë kufi.

9.10. Njehsimi i kufirit të vargjeve konvergjente

Në bashkësinë e vargjeve prej numrave real, do t'i përkufizojmë këto operacionet. Nëse (a_n) dhe (b_n) janë dy vargje të dhëna, atëherë vargu $(a_n + b_n)$ quhet **shumë** e vargjeve (a_n) dhe (b_n) , vargu $(a_n - b_n)$ quhet **ndryshim** i vargut (a_n) me vargun (b_n) , vargu $(a_n b_n)$ quhet **prodhim** i vargjeve (a_n) dhe (b_n) . Nëse $b \neq 0$, për çdo numër natyror

n , atëherë vargu $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ quhet **herësi** i vargut (a_n) me vargun (b_n) .

Vetia vijuese jep përgjigje në pyetjen se prej konvergjencës së vargjeve (a_n) dhe (b_n) a vijon konvergjencia e shumës, ndryshimit, prodhimit dhe herësit të vargjeve.

Nëse (a_n) dhe (b_n) janë vargje konvergjente dhe nëse $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, atëherë:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c a$, për çdo numër real c

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$

ç) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, nëse $b_n \neq 0$, për çdo numër natyror n dhe $b \neq 0$.

Shembulli 1. Kufirin $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 3n + 4}$ e gjejmë në këtë mënyrë:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 3n + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Shembulli 2. Të vërtetojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atëherë $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Me të vërtetë, për shkak të vetisë c) kemi $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^k = a^k$

Shembulli 3. Të vërtetojmë se nëse $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dhe $a_n \geq 0$, për çdo numër natyror n , atëherë $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Me të vërtetë, le të jetë ε çfarëdo numër pozitiv. Prej $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ vijon se për $\varepsilon \sqrt{a}$ ekziston numër natyror n_0 ashtu që $|a_n - a| < \varepsilon \sqrt{a}$, për çdo numër natyror $n \geq n_0$. Prej këtij vijon se

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{\varepsilon \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon, \text{ për çdo numër natyror } n \geq n_0$$

prej ku përfundojmë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Detyra

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 3n - 5}{9n^2 + 2n + 4}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 5}{3n^3 + 2n^2 + 1}. \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+3)(2n+1)(n-6)}{n^3}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 6n - 7}{2n^2 - n + 2} \right)^4. \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 2} - \frac{n^2}{n-1} \right). \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{(3n+2)^2 - (3n-2)^2}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}). \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4}}{\sqrt[3]{n^3 + 5n^2}}.$$

9.11. Vijueshmëria e funksionit

Së pari do të shqyrtojmë disa grafikë të funksioneve me të cilat i kemi hasur më herët. Te figura 1 janë paraqitur grafikët e funksioneve

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{x} \quad \text{н} \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Parashtrohet pyetja se grafikun e çdonjërit prej funksioneve të dhëna a mund ta vizatojmë pa e ngritur lapsin prej letrës, përkatësisht me lëvizje të pandërprerë të lapsit nëpër letër?

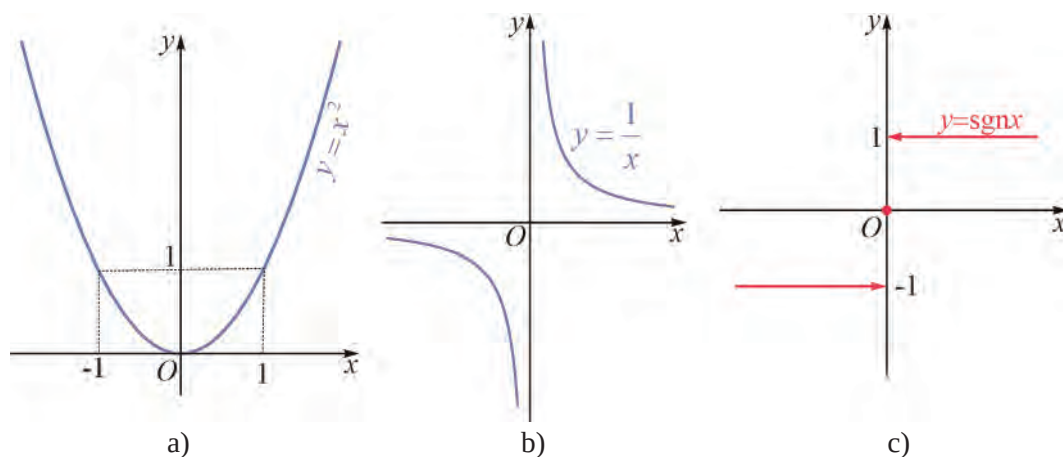


Figura 1

Funksioni $y = x^2$ (figura 1 a) mund të vizatohet me një lëvizje, pra themi se ajo është **e vijueshme** ose se e pandërprerë në çdo pikë. Gjatë të vizatuarit e grafikut të funksionit $y = \frac{1}{x}$ (figura 1 b)) lapsi patjetër të ndahet prej letrës për ta vizatuar grafikun për vlerat $x \neq 0$. Mund të thuhet se funksioni $y = \frac{1}{x}$ është i vijueshëm në çdo pikë prej intervalit $(-\infty, 0)$ dhe në çdo pikë prej intervalit $(0, +\infty)$, kurse te pika $x = 0$ funksioni nuk është përkufizuar. Gjithashtu, mund të thuhet se funksioni $y = \operatorname{sgn} x$ (figura 1 c)) është i vijueshëm në çdo pikë prej intervalit $(-\infty, 0)$ në çdo pikë prej intervalit $(0, +\infty)$, kurse te pika $x = 0$ nuk është i vijueshëm. Ta përkufizojmë konceptin për vijueshmërinë e funksionit në mënyrë më të saktë. Le të jetë funksioni f i përkufizuar në intervalin (a, b) dhe le të jetë $x_0 \in (a, b)$. Për funksionin f themi se është **i vijueshëm** në pikën x_0 , nëse çdo numër pozitiv ekziston numër pozitiv δ , ashtu që për çdo $x \in (a, b)$ për të cilën është plotësuar pabarazimi $x - x_0 < \delta$, vlen pabarazimi $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. Prej përkufizimit drejtpërdrejt vijon se për çdo rrethinë $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ të pikës $f(x_0)$, ekziston rrethinë përkatëse δ e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ të pikës x_0 e cila me funksionin f pasqyrohet në rrethinë $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Shembulli 1. Të vërtetojmë se funksioni $f(x) = 3x + 1$ është i vijueshëm në pikën $x = 1$.

Me të vërtetë, le të jetë dhënë $\varepsilon > 0$. Zgjedhim $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Atëherë për çdo numër real x ashtu që $|x - 1| < \delta$ vlen

$$|f(x) - f(1)| = |3x + 1 - 4| = 3|x - 1| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Shembulli 2. Funksioni $f(x) = \sqrt{x}$ është i vijueshëm në pikën $x = 2$.

Le të jetë dhënë $\varepsilon > 0$. Zgjedhim $\delta = \sqrt{2}\varepsilon$. Atëherë për çdo numër jonegativ real x ashtu që $|x - 2| < \delta$ vlen

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right| = \\ &= \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \leq \frac{|x - 2|}{\sqrt{2}} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetohet se funksioni $f(x) = \sqrt{x}$ është i vijueshëm në çfarëdo pikë $x_0 > 0$. Diskutimi për vijueshmërinë e funksionit $f(x) = \sqrt{x}$ në pikën $x = 0$ nuk ka kuptim pasi pika $x = 0$ nuk është pikë e brendshme prej fushës së përkufizimit të funksionit. Në pikat e këtilla kufitare mundemi të flasim për **vijueshmëri prej majtas (djathtas)**. Pikërisht, nëse kushtin $|x - x_0| < \delta$ e zëvendësojmë me $-\delta < x - x_0 \leq 0$ ($0 \leq x - x_0 < \delta$), atëherë për funksionin f themi se është i vijueshëm prej majtas (djathtas) te pika x_0 . Për këtë shkak funksioni $f(x) = \sqrt{x}$ është i vijueshëm prej të djathtës në pikën $x = 0$.

Mund të vërtetojmë vijueshmërinë në çdo pikë prej fushës së përkufizimit edhe të funksioneve elementare: të fuqisë, eksponenciale, logaritmike dhe trigonometrike (edhe pse ajo mënyrë jo patjetër gjithmonë të jetë e zakonshme sikurse shembujt e sipërm). Në rastin e funksioneve të përbëra do t'i shfrytëzojmë këto veti.

1⁰. Nëse funksionet f dhe g janë të vijueshme në pikën x_0 , atëherë në atë pikë janë të vijueshme edhe funksionet $f \pm g$, kf ($k \neq 0$), fg dhe $\frac{f}{g}$ (me kusht $g(x_0) \neq 0$).

2⁰. Nëse funksioni g është i vijueshëm në pikën $x = x_0$, dhe funksioni f është i vijueshëm në pikën $y_0 = g(x_0)$, atëherë edhe funksioni i përbërë $f \circ g$ është i vijueshëm në pikën $x = x_0$.

Shembulli 3. Funksioni $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ është i vijueshëm për çdo numër real x .

Funksioni $f_1(x) = x$ është i vijueshëm për çdo numër real x_0 . Me të vërtetë, për çfarëdo $\varepsilon > 0$ zgjedhim $\delta = \varepsilon$. Atëherë për çfarëdo numër real x , ashtu që $|x - x_0| < \delta$, kemi

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Pastaj me zbatimin e vetisë 1^0 mund të përfundojmë se janë të vijueshme edhe funksionet $f_2(x) = x^2$ dhe $f_3(x) = x^3$. Pasi funksioni konstant është i vijueshëm (vërtetimi i këtij fakti është i thjeshtë), kemi se edhe funksioni $g(x) = 5$ është i vijueshëm. Në fund, duke zbatuar vetinë 1^0 te funksionet $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ dhe $g(x) = 5$, fitojmë dy funksione $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ është i vijueshëm për çdo numër real x_0 .

Shembulli 4. Gjeji bashkësinë e pikave të cilat funksioni $f(x) = \frac{1}{x-1}$ është i vijueshëm.

Pasi funksioni $g(x) = x - 1$ është i vijueshëm, me zbatimin e vetisë 2^0 përfundojmë se funksioni $f(x) = \frac{1}{x-1}$ është i vijueshëm për çdo pikë $x \neq 1$.

Detyra

1. Vërteto se funksioni $f(x) = x^2$ është i vijueshëm në pikën $x = 3$.
2. Vërteto se funksionet pikë. $y = x^3$ dhe $y = x^4$ janë të vijueshme në çfarëdo
3. Sqaro pse këto funksione janë të vijueshme te vlerat e shënuara të x :
a) $y = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$; **b)** $y = e^x + 2x$;
c) $y = \ln(x+1)$, $x > -1$; **d)** $y = x^2 e^x$.
4. Caktoi pikat e ndërprerjes të këtyre funksioneve:
a) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$; **b)** $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; **c)** $y = \frac{x-3}{x^2 - 1}$.

9.12. Vlera kufitare e funksionit

Koncepti për vlerën kufitare të funksionit

Para se ta fusim përkufizimin për vlerën kufitare të funksionit, do ta shqyrtojmë këtë shembull.

Shembulli 1. Ta shqyrtojmë funksionin

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

që është përkufizuar për çdo numër real x , përveç për $x = 2$. Me njehsimin e drejtpërdrejt mund të përfundojmë se kur vlerat e ndryshores x pak dallohen prej numrin 2, atëherë vlerat e funksionit $f(x)$ afrohen deri te numri 4. Poashtu, vërejmë se për $x \neq 2$, vlen

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

pra kemi se $f(x) \approx 2 + 2 = 4$ kur $x \approx 2$.

Funksioni f le të jetë përkufizuar në intervalin (a, b) që e përmban pikën x_0 përveç, ndoshta te pika x_0 . Numri real A quhet **vlere kufitare** ose **kufiri** i funksionit f kur x tenton kah x_0 , nëse për çdo numër pozitiv ε ekziston numër pozitiv δ , ashtu që për çdo $x \in (a, b)$ (përveç ndoshta për x_0) për të cilën plotësohet pabarazimi $|x - x_0| < \delta$ vlen pabarazimi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Atëherë shkruajmë

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

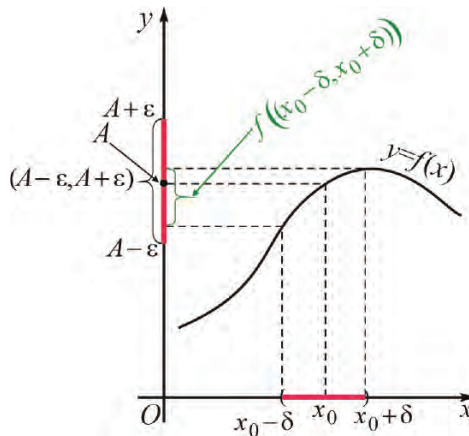


Figura 1

Prej vet përkufizimit drejtpërdrejt vijon se funksioni f ka vlerë kufitare A kur x tenton kah x_0 , nëse për çdo rrethinë ε të pikës A ekziston rrethinë δ e pikës

$f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. x_0 , ashtu që për çdo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vlen Përkufizimi për kufirin e funksionit mund edhe gjeometrikisht të interpretohet. Te figura 1 është paraqitur grafiku i funksionit f të përkufizuar te ndonjë rrethinë të pikës x_0 . Për $\varepsilon > 0$ vizatojmë shirit të kufizuar me drejtëzat $y = A - \varepsilon$ dhe $y = A + \varepsilon$. Numri përkatës δ duhet të jetë i atillë që pjesa prej grafikut të funksionit në intervalin $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Të përmbahet te shiriti par pak i vizatuar (përveç. Ndoshta, pika $(x_0, f(x_0))$).

Shembulli 2. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$. Sa është δ , për $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

Për $\varepsilon > 0$ zgjedhim $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Atëherë për çdo numër x , ashtu që $|x - 3| < \delta$, kemi $|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Nëse $\varepsilon = \frac{1}{100}$, , atëherë $\delta = \frac{1}{200}$.

Shembulli 3. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Le të jetë dhënë $\varepsilon > 0$. Zgjedhim $\delta = \varepsilon$. Atëherë për çdo numër real $x \neq 3$, ashtu që $|x - 3| < \delta$, kemi

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3| < \delta = \varepsilon.$$

Të vërejmë se në këtë rast funksioni i dhënë nuk është përkufizuar te pika $x = 3$.

Në praktikë jo gjithmonë njehsojmë kufi të funksionit si te shembujt paraprak, kurse punojmë sipas mënyrës së shkurtuar. Pikërisht, prej përkufizimit për vijueshmëri të funksionit, nëse funksioni f është i vijueshëm në pikën x_0 , atëherë $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Dhe, anasjelltas nëse $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, atëherë funksioni f është i vijueshëm në pikën x_0 . Në bazë të kësaj vetie të funksioneve të vijueshme, lehtë mund të njehsohet vlera kufitare e funksionit të vijueshëm te ndonjë pikë. Për shembull, pasi funksioni $y = x^2 - 1$ është i vijueshëm në çdo pikë $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$. Megjithatë nëse kufiri i funksionit sillet në formën $\frac{0}{0}$, si te shembulli paraprak $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$ dhe $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$, atëherë emëruesi dhe numëruesi paraprakisht i thjeshtojmë, kurse pastaj kërkojmë vlerën kufitare.

Shembulli 4. Njehso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

$$\text{Nëse } x \neq 0, \text{ atëherë } \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1},$$

$$\text{pasi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \text{ është i përcaktuar për } x = 0.$$

Shembulli 5. a) Ta njehsojmë kufirin $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$.

Për shkak $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ kemi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} ((1+x) - 1)((1+x)^2 + (1+x) + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^2 + (1+x) + 1) = 3.$$

b) Në mënyrë analoge me a) për $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, ku n është numër natyror,

kufiri duke shfrytëzuar identitetin

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

fitohet se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} ((1+x) - 1) ((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1) = n. \end{aligned}$$

Shembulli 6. a) Për kufirin $\lim$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

nëse i shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me shprehjen $(\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1$ dhe e shfrytëzojmë identitetin të përmendur te shembulli paraprak, do të kemi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1)((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Në mënyrë analoge si te a) për kufirin

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

ku n është numër natyror, me shumëzimin e numëruesit dhe emëruesit me shprehjen

$$(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1$$

kemi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Njehsimi i vlerës kufitare të funksionit

Për njehsimin e vlerave shpesh i shfrytëzojmë këto veti të vlerave kufitare.

Nëse $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ dhe $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, atëherë kemi

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Domethënë, kufiri prej shumës (ndryshimit, prodhimit ose herësit) të dy funksioneve është e barabartë me shumën (ndryshimit, prodhimit ose herësit) prej kufijve të atyre funksioneve.

Shembulli 7. Gjeji vlerën kufitare $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^3-1} \right).$

Pasi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad \text{dhe} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

për shkak të vetisë së sipërme kemi se

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

Shembulli 8. Gjeji kufirin $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$

Në këtë rast nuk mund vetinë e sipërme ta përdorim pasi nuk ekzistojnë vlera të mbledhësve. Për këtë do ta transformojmë shprehjen në këtë mënyrë (duke pasur parasysh se $x \neq 1$):

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{x^2+x+1-3}{x^3-1} = \frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Prandaj, kemi se

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

Shembulli 9. Gjej $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}.$

Pas pjesëtimit të numëruesit dhe emëruesit me kemi se x , me zbatimin e vetisë 1^0 dhe detyra 5,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Zgjerimi i konceptit për vlerën kufitare

Vlera kufitare e funksionit kur argumenti tenton në pakufi. Funksioni f le të jetë përkufizuar në intervalin $(a, +\infty)$. Nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numër $\delta > a$ ashti që për çdo $x > \delta$ vlen $|f(x) - A| < \varepsilon$, atëherë numri A quhet vlera kufitare e funksionit kur $x \rightarrow +\infty$ dhe shkruajmë

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ (figura 2).}$$

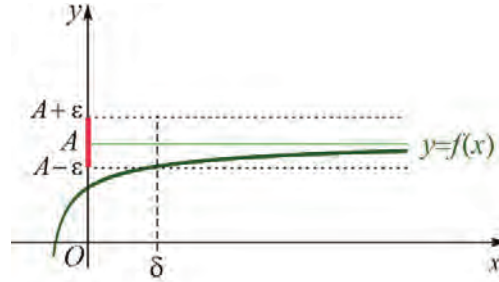


Figura 2

Shembulli 10. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ çfarëdo i dhënë $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$. e Atëherë për çdo $x > \delta$ kemi

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{\delta} = \varepsilon.$$

Ngjashëm, përkufizohet edhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ kur $x \rightarrow -\infty$.

Vlera kufitare e pafundshme.

a) Funksioni f le të jetë përkufizuar në intervalin (a, b) që e përmban pikën x_0 përveç, ndoshta te pika x_0 . Nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston numër $\delta > 0$, ashtu që për çdo $x \in (a, b)$ (përveç ndoshta për x_0) për të cilën është plotësuar pabarazimi $x - x_0 < \delta$ vlen pabarazimi $f(x) > \varepsilon$, atëherë themi se funksioni f tenton kah $+\infty$ kur $x \rightarrow x_0$ dhe shkruajmë

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (figura 3).}$$

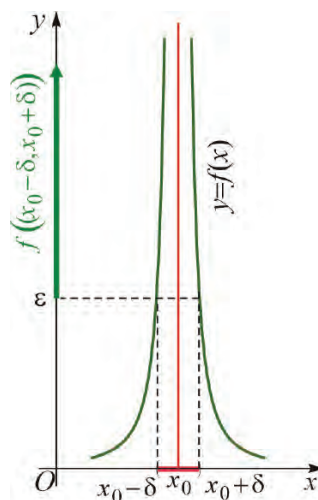


Figura 3

Shembulli 11. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ Çfarëdo i dhënë. Zgjedhim $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Atëherë për çdo $x \neq 1$ ashtu që $0 < |x - 1| < \delta$, vlen pabarazimi $\frac{1}{(1-x)^2} > \frac{1}{\delta^2} = \varepsilon$.

Në mënyrë analoge përkufizohet edhe vlera kufitare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

b) Funksioni f le të jetë përkufizuar në intervalin $(a, +\infty)$. Nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta > a$, ashtu që për çdo $x > d$ vlen pabarazimi $f(x) > \varepsilon$, atëherë thuhet se funksioni f tenton në $+\infty$ kur $x \rightarrow +\infty$ dhe shkruajmë

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Shembulli 12. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ I dhënë çfarëdo. Zgjedhim $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Atëherë për çdo $x > d$ vlen pabarazimi $|x^2| > \delta^2 = \varepsilon$.

Në mënyrë analoge përkufizohen kufijtë

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Detyra

1. Duke shfrytëzuar përkufizimin për kufi të funksionit vërteto se:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3;$ **b)** $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5;$ **c)** $\lim_{x \rightarrow -1} (5x-3) = -8.$

ç) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 9x = 3;$ **d)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3};$ **dh)** $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-4} = 0.$

2. Vërteto se $\lim_{x \rightarrow 2} (3x+2) = 8$. Sa duhet të jetë numri δ për $\varepsilon = \frac{1}{1000}$?

3. Gjeji këto kufij:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4};$ **b)** $\lim_{x \rightarrow 0,1} -5;$ **c)** $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \log_2 3.$

4. Gjeji këto kufij:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2;$ **b)** $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (6x-1);$ **c)** $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2}.$

5. Njehso këto vlera kufitare:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x-1)}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3 + 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}; \\ \text{ç)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^4 - 1}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}; & \text{dh)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 5x + 3}. \end{array}$$

Gjeji këto kufij:

$$\begin{array}{lll} \text{6. a)} \lim_{x \rightarrow -2} (7x+1); & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -2} (x+4)^2; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4). \\ \text{7. a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}. \\ \text{8. a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{3x^3 + 2x^2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). \\ \text{9. a)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 6}{x + 3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7x + 6}. \\ \text{10. a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{2x^2 - 12x + 16}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 9x + 6}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 7x - 11}{x^2 + 9x - 10}. \\ \text{11. a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{1 - \sqrt{x-1}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2}. \\ \text{12. a)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - 4x + 3}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}. \end{array}$$

13. Njehso këto vlera kufitare:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x-2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+2x-x^2}{2x^2-x}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{x^2+2} \right); \\ \text{ç)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{1+x^4}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1}; & \text{dh)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^3}{1-x^2}. \end{array}$$

14. Njehso këto vlera kufitare

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; \\ \text{ç)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}); & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x); & \text{dh)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x). \end{array}$$

9.13. Vlerat kufitare të veçanta

Këtu do të përmendim disa vlera kufitare të cilat nuk janë të qarta, kurse shpesh paraqiten gjatë zgjidhjes së llojeve të ndryshme të detyrave. Disa zbatime të tzyre te njehsimi në vlera tjera kufitare do të paraqiten te shembujt që vijojnë.

$$1^0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (\alpha \neq 0)$$

Shembulli 1. Njehso këto vlera kufitare:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}};$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x;$$

$$\text{ç)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x};$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(e^x - 1);$$

$$\text{dh)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}.$$

Kemi se **a)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}} = e$, ku e zbatojmë kufirin 1^0 dhe

fakti se $x \rightarrow \infty$ tërheq se $\frac{x}{4} \rightarrow \infty$.

$$\text{b)} \quad \text{Kemi } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} = e.$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9} \cdot 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9}}\right)^9 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9}}\right)^9 = e^9.$$

$$\text{ç)} \quad \text{Pasi } \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x} = \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}}, \text{ me zëvendësimin } \frac{2}{x-1} = y, \text{ (për shkak}$$

$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0$) kemi i se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e, \text{ ndërsa } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1} = 4.$$

$$\text{Prej këtu kemi se } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x} = e^4.$$

Theksojmë se këtu e shfrytëzojmë këtë rregull:

Nëse $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ dhe $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ (A dhe B janë numra të fundshëm),

$$\text{atëherë } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B$$

që vijon barazimi $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ dhe vijueshmëria e funksioneve e^x dhe $\ln x$.

d) Kemi se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^x - 1) = \ln e = 1$ për shkak të rezultatit 3^0 për $a = e$.

dh) Nëse te numëruesi shprehjes e zbresim dhe e shtojmë numrin 1, kurse pastaj e zbatojmë kufirin 4^0 , kemi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - (\sqrt{1+x} - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Detyra

1. Njehso këto vlera kufitare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}; \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}; & \text{ç)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}. \end{aligned}$$

2. Njehso këto vlera kufitare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}; & \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}; \\ \text{ç)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}; & \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{3x} - 1}{x}; & \text{dh)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1). \end{aligned}$$

3. Gjeji këto vlera kufitare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{3 - 4x + x^4}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}; \\ \text{c)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}; & \text{ç)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}. \end{aligned}$$

9.14. Asimptotat e funksionit

Gjatë skicimit dhe të vizatuarit e grafikëve të funksioneve, në veçanti është e dobishme nëse paraprakisht gjenden asimptotat e funksionit. Asimptotat të grafikut në realitet janë drejtëza në rrafsh, nga të cilat pjesë e grafikut të funksionit, përkatësisht ndonjë nënbashkësi e pikave $(x, f(x))$, tentojnë kah ndonjë drejtëz n , kur pika $(x, f(x))$ largohet në pakufi prej fillimit të koordinatave. Këtu me termin “tenton” nënkuptohet se vlera kufitare e largësisë prej pikave me koordinata

Barabartë me zero. $(x, f(x))$ deri të drejtëza n është e Varësisht prej kësaj si është pozita reciproke e drejtëzës me boshtet e koordinatave, dallojmë tre lloje të asimptotave:

- asimptota horizontale, kur drejtëza n është paralele me boshtin x ,
- asimptota vertikale, nëse drejtëza n është paralele me boshtin y ,
- asimptota e pjerrët, nëse drejtëza n nuk është paralele me boshtin x dhe nuk është paralele me boshtin y . Poashtu, është lejuar grafiku të pret drejtëzën n në shumë pika të fundshme ose pafund shumë pika. Gjithashtu një grafik të ketë edhe më shumë asimptota.

Drejtëzat të cilat janë paralele me boshtin x kanë barazimi të formës $y = b$. Poashtu, drejtëza $y = b$ është **asimptotë horizontale** të funksionit f , nëse vlen të paktën njëra prej të dy kushteve:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ dhe } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Nëse vlen kushti i parë, atëherë “dega” e djathtë e grafikut tenton kah drejtëza $y = b$, kurse nëse vlen kushti i dytë, atëherë “dega” e majtë e grafikut tenton kah drejtëza $y = b$. Por është e mundshme dega e majtë e grafikut të tenton kah një drejtëz (horizontale), kurse dega e djathtë tenton kah tjetër drejtëz (horizontale).

Shembulli 1. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Pasi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

kemi se drejtëza $y = 1$ është asimptotë horizontale (figura 1).

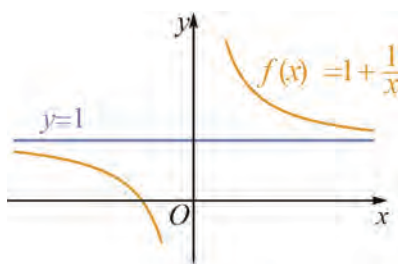


Figura 1

Shembulli 2. Funksionet

$$y = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} \text{ dhe } y = 1 - \frac{x}{x^2 + 2}$$

kanë asimptota horizontale $y = 1$, pasi për të gjitha ato vlen $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1$.

Por ato dallohen sipas asaj që grafiku i funksionit të parë gjendet mbi asimptotën për vlera të mëdha të x , grafiku i funksionit të dytë gjendet nën asimptotën.

Pas vizatimit të grafikut është e dëshirueshme të vërejmë si është shenja (+ ose -) të ndryshimit $f(x) - b$ për vlera mjaftë të mëdha të x dhe vlera mjaftë të vogla të x . Poashtu,

- nëse ekziston numër real $M > 0$ i atillë që $f(x) - b > 0$ për çdo $x > M$, atëherë grafiku i funksionit është mbi asimptotën;
- nëse ekziston numër real $M < 0$ i atillë që $f(x) - b > 0$ për çdo $x < M$, atëherë grafiku i funksionit është mbi asimptotën;
- nëse ekziston numër real $M > 0$ i atillë që $f(x) - b < 0$ për çdo $x > M$, atëherë grafiku i funksionit është nën asimptotën;
- nëse ekziston numër real $M < 0$ i atillë që $f(x) - b < 0$ për çdo $x < M$, atëherë grafiku i funksionit është nën asimptotën.

E dimë se drejtëzat të cilat janë paralele me boshtin y kanë barazimi të llojit $x = a$. Themi se drejtëza $x = a$ është **asimptotë vertikale** i funksionit f , nëse vlen të paktën njëri prej katër kushteve

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty.$$

Poashtu shenja (+ ose -) pas a tregon se x a tenton kah a prej të djathtës ($a +$) ose prej të majtës ($a -$). Poashtu, kur x tenton kah a edhe prej të majtës edhe prej të djathtës, funksioni tenton kah $+\infty$ ose $-\infty$, që do të thotë të mundshme janë katër raste.

Shembulli 3. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Pasi

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{dhe} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

përfundojmë se drejtëza $x = 1$ është asimptotë vertikale e funksionit (figura 1).

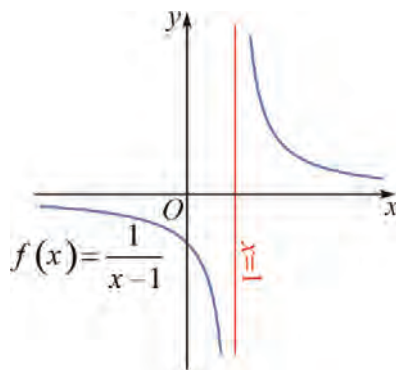


Figura 2

Drejtëzat të cilat janë paralele me boshtin x dhe nuk janë paralele me boshtin y kanë barazime të formës $y = kx + n$, ku $k \neq 0$. Poashtu mund të tregohet se

$$y = kx + n, (k \neq 0)$$

është **asimptotë e pjerrët** e funksionit

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ dhe } n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

ekzistojnë edhe të fundshme. Njëjtë sikurse edhe te asimptotat horizontale edhe këtu mund të njehsohet pavarësisht vlerat kufitare kur $x \rightarrow +\infty$ dhe $x \rightarrow -\infty$ dhe të flasim për asimptotën e pjerrët prej të majtës dhe të djathtës. Gjithashtu edhe këtu është e dëshirueshme të vërejmë si është shenja e ndryshimit $f(x) - kx - n$. Nëse ai është pozitiv, grafiku është mbi asimptotën, kurse nëse është negativ, grafiku është nën asimptotën.

Shembulli 4. Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Pasi

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \text{ и } n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = 1$$

funksioni ka asimptotë të pjerrë (figura 3). $y = x + 1$. Poashtu, drejtëza $x = 1$ është vertikale (figura 3).

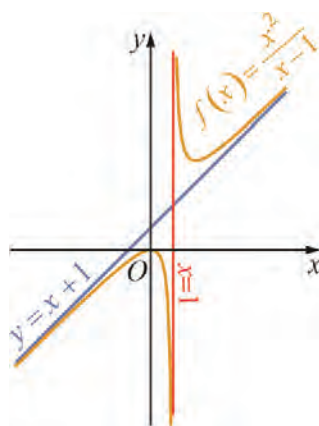


figura 3

Detyra

Gjeji asimptotat e këtyre lakoreve:

1. a) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$; b) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$; c) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^5 + 1}$.

2. a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = e^x + e^{-x}$; c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

3. Për cilën vlerë të parametrin k , funksioni $f(x) = \frac{2x^k + x + 1}{x + 2}$ ka asimptotë të pjerrët?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Cakto fushën e përkufizimit të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \sqrt[4]{3-x} + \sqrt{x+1}$; **b)** $f(x) = \log(16-x^2) + \frac{1}{1-\log x}$.

2. Shqyrto monotoninë e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [1, \infty)$; **b)** $f(x) = x + \log x$;

c) $f(x) = 2^{x+3}$; **d)** $f(x) = 2x + e^{x+1}$.

3. Cakto pikëprerjet e grafikut të çdonjërit prej funksioneve me boshtin x :

a) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+x+1}$; **b)** $f(x) = \ln(x^2-8)$; **c)** $f(x) = e^{3x-3}$.

4. Cakto vlerën e parametrin k të funksioni:

a) $f(x) = (2k+3)x + 3$, nëse ai monotonisht rritet;

b) $f(x) = (-5k+1)x + 1$, nëse ai monotonisht zvogëlohet.

5. Gjeji koordinatat e kulmeve, intervalet e monotonisë dhe bashkësinë e vlerave të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; **b)** $f(x) = -3x^2 - 6x - 10$; **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

6. Vizato grafikët e këtyre funksioneve katrore:

a) $f(x) = (x-3)^2$; **b)** $f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$; **c)** $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

7. Përmend disa veti të këtyre funksioneve:

a) $f(x) = x^6$; **b)** $f(x) = x^9$; **c)** $f(x) = \frac{1}{x^8}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$; **e)** $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$; **f)** $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

8. Vizatoi në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e këtyre funksioneve

$$f(x) = 10^x, \quad f(x) = 10^{-x}, \quad f(x) = -10^x, \quad f(x) = -10^{-x}.$$

9. Vizatoi në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e këtyre funksioneve

$$f(x) = \lg x, \quad f(x) = \log(-x), \quad f(x) = -\log(x), \quad f(x) = -\log(-x).$$

10. Gjeji funksionin invers të çdonjërit prej funksioneve:

a) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{4}$; **b)** $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$; **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$; **d)** $f(x) = 10^{x-2} + 3$.

11. Shkruaj katër anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm a_n , nëse:

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; **b)** $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; **c)** $a_n = \frac{1}{n!}$.

12. Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$. Trego se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Duke filluar prej n , pafund shumë anëtar të vargut gjenden në intervalin $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right)$?

13. Trego se këto vargje janë divergjente:

a) $a_n = (-1)^n n$; **b)** $a_n = 1^n + (-1)^n$; **c)** $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

14. Trego se vargu me anëtarin e përgjithshëm a_n Është i kufizuar, nëse:

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$; **b)** $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; **c)** $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}$.

Gjeji këto kufi:

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}$. **16.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n+3}$.

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+7}{n^2+2n-1}$. **18.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n-5}}$. **20.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-5n+6} - n$.

21. Njehso vlerat kufitare të këtyre funksioneve:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1)$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$; **ç)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$; **dh)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}}$ ($a > 1$).

22. Njehso vlerat kufitare të këtyre funksioneve:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; **c)** $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

23. Njehso vlerat kufitare të këtyre funksioneve:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2-x+16}$; **c)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-13x^2+36}{x^3-27}$.

Njehso kufijtë:

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x$. **25.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$. **26.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$. **27.** $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

28. Gjeji asimptotat e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$; **b)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$; **c)** $f(x) = x+1+\frac{1}{x^2}$; **ç)** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
d) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; **dh)** $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x^2)}$; **e)** $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$; **ë)** $f(x) = xe^{-x}$.

PËRGJIGJE, UDHËZIME DHE ZGJIDHJET E DETYRAVE

NJËSIA MODULARE 1

1.1.

1. Sistemi i barazimeve lineare dhe katrore me dy të panjohura janë: a), b) dhe d).
 2. **a)** Po; **b)** Jo; **c)** Jo. 3. **a)** Është zgjidhje; **b)** Nuk është zgjidhje; **c)** Është zgjidhje; **ç)** Nuk është zgjidhje.

$$4. \text{ a) } \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}; \text{ c) } \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ x^2 + 2z^2 - x + 3z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases};$$

$$\text{ç) } \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}; \text{ d) } \begin{cases} -x + y - 10 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + \frac{37}{2} = 0 \end{cases}; \text{ dh) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y = 0 \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}.$$

5. **a)** $\{(3, 5), (5, 3)\}$; **b)** $\{(-3, -9), (3, 9)\}$;

c) $\left\{\left(\frac{-3 + \sqrt{105}}{4}, \frac{3 + \sqrt{105}}{6}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{105}}{4}, \frac{3 - \sqrt{105}}{6}\right)\right\}$; **ç)** $\{(2, 1), (-14, 17)\}$;

d) $\left\{\left(\frac{76 + 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 + 6\sqrt{166}}{13}\right), \left(\frac{76 - 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 - 6\sqrt{166}}{13}\right)\right\}$.

6. Zgjidhje reale kanë sistemet: a), ç) dhe dh), kurse zgjidhje komplekse kanë sistemet b), c) dhe d).

1.2.

1. **a)** Jo, **b)** Po. 2. **a)** $(1, 3), (1, -3), (-1, 3)$ dhe $(-1, -3)$; **b)** $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$.

3. **a)** $\left(1, \frac{25}{7}\right), \left(-1, \frac{1}{7}\right)$; **b)** $\left(\frac{6}{5}, -\frac{58}{25}\right), (-1, -1)$. 4. **a)** $(-3, 2), (3, 2)$; **b)** $(-1, 4), (1, 4)$.

5. **a)** $(2\sqrt{3} + \sqrt{6}, 2\sqrt{3} - \sqrt{6}), (2\sqrt{3} - \sqrt{6}, 2\sqrt{3} + \sqrt{6}), (\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, -\sqrt{6} - 2\sqrt{3}),$
 $(-\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{6} - 2\sqrt{3})$; **b)** $(-2, 1), (-1, 2), (1, 2), (2, -1)$.

1.3.

1. $(2, 0), (0, 2), \left(\frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{11})\right), \left(\frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{11})\right)$.

2. $(2, 1), (-2, -1), (-1, -2), (1, 2)$. 3. $(2, 1), (1, 1), (3, 3), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$. 4. $(2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2)$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. **a)** $(1, 1)$ dhe $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{13}{7}\right)$; **b)** $\left(-\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 - \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$ dhe $\left(\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 + \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$.

2. **a)** $\left(-2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$ dhe $\left(-2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$; **b)** $(3, 9), (-3, -9)$.

$$3. \text{ a) } \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2} \right) \text{ dhe } \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2} \right);$$

$$\text{b) } \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \right) \text{ dhe } \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \right).$$

4. Sistemi nën a).

$$5. \text{ a) } (\sqrt{5}, \sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, \sqrt{2});$$

$$\text{b) } (4, 2), (-4, -2), \left(3\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right); \left(-3\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}} \right).$$

$$6. \text{ a) } (1, 2), (-1, -2), \left(\frac{5}{2\sqrt{262}}, \frac{43}{2\sqrt{262}} \right), \left(-\frac{5}{2\sqrt{262}}, -\frac{43}{2\sqrt{262}} \right);$$

$$\text{b) } (3, 1), (-3, -1), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

7. Sistemi nën a).

$$8. \text{ a) } (2, -1), (-1, 2), (-2, 1), (1, -2), \text{ b) } (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1), \text{ c) } (1, 3),$$

$$(3, 1), \text{ ç) } (2, 1), (1, 2), (1, -3), (-3, 1).$$

$$9. \text{ a) } (1, 3), (-1, -3), \left(\sqrt{\frac{19}{3}}, \sqrt{\frac{19}{3}} \right), \left(-\sqrt{\frac{19}{3}}, -\sqrt{\frac{19}{3}} \right);$$

$$\text{b) } (1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5} \right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5} \right).$$

$$10. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \right); \text{ b) } (\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3}).$$

$$11. \text{ a) } (-2, 1), (-1, 3); \text{ b) } (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, -\sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{2}).$$

$$12. \text{ a) } \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right), (0, 1); \text{ b) } (-\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (\sqrt{2}, 1).$$

$$13. \text{ a) } \left(-3, -\frac{3}{2} \right), \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{10} \right), \left(\frac{9}{14}(-1-\sqrt{15}), \frac{3}{14}(-1-\sqrt{15}) \right), \left(\frac{9}{14}(-1+\sqrt{15}), \frac{3}{14}(-1+\sqrt{15}) \right);$$

$$\text{b) } \left(-\frac{16}{7}, -\frac{8}{7} \right), (2, 1), \left(\frac{1}{4}(-1-\sqrt{65}), \frac{1}{4}(-1-\sqrt{65}) \right), \left(\frac{1}{4}(-1+\sqrt{65}), \frac{1}{4}(-1+\sqrt{65}) \right).$$

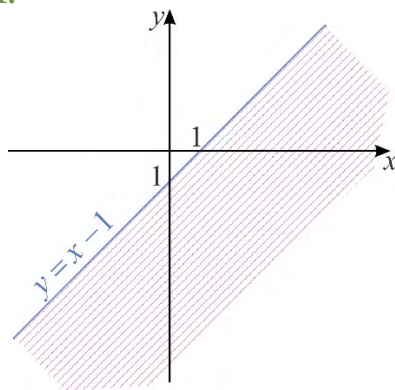
NJËSIA MODULARE 2

2.1.

$$1. \left\{ (k, k-1) \mid k \in \mathbb{R} \right\}. \quad 2. \left\{ \left(k, \frac{3-k}{6} \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}. \quad 3. \left\{ (k, 28k+14) \mid k \in \mathbb{R} \right\}. \quad 4. x=3. \quad 5. x=-2.$$

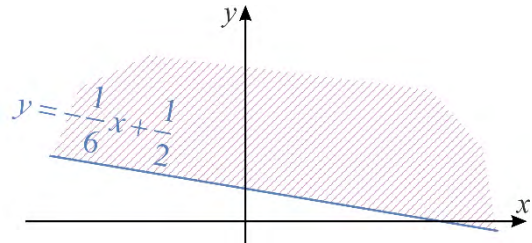
$$6. \emptyset. \quad 8. x=-2. \quad 10. \text{ Boshti } y. \quad 11. \text{ Drejtëza paralele me boshtin } x \text{ dhe kalon nëpër pikën } (0, 4).$$

1.

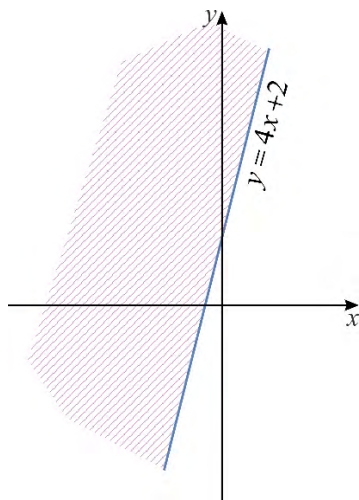


2.2.

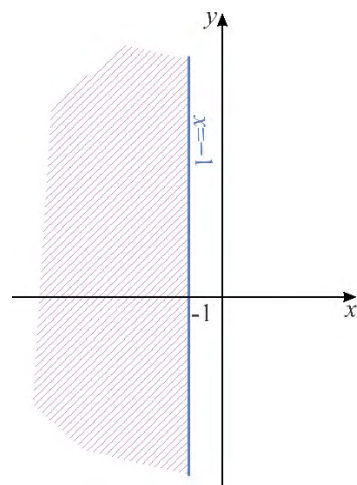
2.



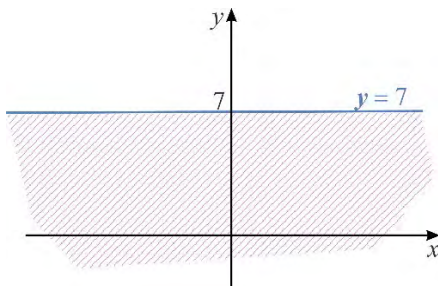
3.



4.



5.



2.4.

2. $z = 9$ për $x = 2, y = 3$; 3. $z = 30$ për $x = 0, y = 5$.

4. Gjeje vlerën më të madhe të funksionit $z = 5x + 3y$, nëse vlejné kufizimet $2x + 4y \leq 60$, $8x + 6y \geq 150$, $x \geq 0$ dhe $y \geq 0$ (x – sasi prej tonikës A, y – sasi prej tonikës C). Shpenzimi minimal arrihet për $x = 0$ dhe $y = 25$, por ai shpenzim është 75 euro.

5. Gjeje vlerën më të madhe të funksionit $z = 9x + 7y$, nëse vlejné kufizimet $0,6x + 0,4y \leq 80$, $0,4x + 0,66y \leq 100$, $0 \leq x \leq 60$ dhe $y \geq 0$ (x – sasia e Premiumit në kilogram dhe y – sasia e Superit në kilogram). Profiti është më i madh dhe është 1340 euro, nëse prodhohen $x = 40$ kilogram Premium dhe $y = 140$ kilogram Super.

6. Gjeje vlerën më të madhe të funksionit $z = 300x + 375y$, nëse vlejné kufizimet $10x + 10y \leq 7500$, $20x + 30y \leq 19500$, $x \geq 0$ dhe $y \geq 0$ (x – numri i pantallonave të llojit të parë y – numri i pantallonave të llojit të dytë). Që të fitohet përfitimi maksimal prej 258750 denarë, duhet të prodhohen 300 palë pantallona të llojit të parë dhe 450 palë të pantallona të llojit të dytë.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

13. $z = 32, x = 2, y = 3$. 14. $z = \frac{45}{2}, x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{2}$. 15. c) $z = 16$ për $x = 0, y = 2$.

16. Vlera më e madhe $z = 51$ arrihet për $x = 6, y = 3$ por më e vogla $z = 14$ arrihet për $x = 0, y = 2$.

17. Vlera më e madhe është $z = 95, x = 5, y = 30$, por më e vogla $z = 74, x = 8, y = 22$.

18. Përfitimi maksimal është 32 euro.

19. Numri maksimal i peshqve me të cilat liqeni mund të peshkohet është 250.

NJËSIA MODULARE 3

3.1.

1. $G_5 = 3836,24$ euro, $K_5 = 1036,24$ euro. 2. 8193,8 denarë. 3. 26699 denarë.

4. 7,527%. 5. 5,66%. 6. Banka e dytë krediton në mënyrë të volitshme.

3.2.

1. $p = 6\%$. 2. 9,8%. 3. 3,11 vjet. 4. $n \approx 1.07$ vjet. 5. 168714 denarë.

6. 107686,5 denarë.

3.3.

1. $G_{20} = 3612,22$ denarë. 2. $t = 12 + \frac{5}{12}, G_t = 10000 \cdot 1,02^{12} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{100}\right) = 12788,1$.

3. 741024 denarë. 4. 3,434% 5. 819858 denarë.

6. a) 21589,25 euro, b) 21911,23 euro, c) 22080,40 euro.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. $G_2 = 4665,6$ euro, $K_5 = 665,6$ euro. 2. 970,6 denarë. 3. 11,11%. 4. $p = 23,8\%$.

5. 3,96 vjet. 6. 1608,598 denarë. 7. $G_{20} = 6573,4$ denarë.

8. $t = 10 + \frac{7}{12}, G_t = 10000 \cdot 1,05^{10} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \frac{7}{12}}{100}\right) = 197747,81$.

9. a) 180611 euro, b) 181401,8 euro, c) 181804,4 euro, ç) 182075,5.

10. $G_5 = 16105,1$ denarë. 11. 19965 euro. 12. $G_0 \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1 - \frac{pn}{100} \right) = 4864$ denarë. 13.

$K = 2500 \left(\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 - 1 \right) = 153,02$ euro.

14. $50000 \cdot 1,045^{2n} = 60000 \cdot 1,015^{4n}$, pra $n = 6,4$ vjet.

NJËSIA MODULARE 4

4.1.

1. Gjykimi le të jetë i saktë për $n = k$ (supozimi induktiv). Do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \underbrace{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}_{s.i.} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k^2 + 2k + 1) + 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)}{4} = \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} = \frac{k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k^3 + 8k^2 + 8k + k^2 + 4k + 4}{4} = \\ &= \frac{k^2(k^2 + 4k + 4) + 2k(k^2 + 4k + 4) + k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k^2 + 2k + 1)(k^2 + 4k + 4)}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

2. Gjykimi le të jetë i saktë për $n = k$ (supozimi induktiv). Do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}_{s.i.} + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

3. Gjykimi le të jetë i saktë për $n = k$ (supozimi induktiv). Do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) &= \underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}}_{\text{supozimi induktiv}} + (k+1)(k+2)(k+3) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

4. Gjykimi le të jetë i saktë për $n = k$ (supozimi induktiv). Do të vërtetojmë se gjykimi është i saktë për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \underbrace{\frac{k}{3k+1}}_{\text{supozimi induktiv}} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{k(3k+4) + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2 + 3k + k + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k(3k+1) + (3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} \end{aligned}$$

4.2.

1. Udhëzim: Nëse me A e shënojmë kulmin $k + 1$ të shumëkëndëshit, atëherë kemi k -

këndësh i cili ka $\frac{k(k-3)}{2}$ diagonale, ia shtojmë të gjitha diagonalat të cilat mund t'i tërheqim prej kulmit A domethënë $(k+1) - 3$ dhe në fund diagonalja e formuar prej të dy kulmeve fqinje me A e cila te k -këndëshi është brinja, kurse te $k + 1$ -këndëshi është diagonale. Domethënë

$$\frac{k(k-3)}{2} + ((k+1) - 3) + 1 = \frac{(k+1)((k+1) - 3)}{2}.$$

2. Për $n + 1$ te ana e djathtë fitohet

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2nx}{2 \sin x} + \cos(2n+1)x &= \frac{\sin 2nx + 2 \cos(2n+1)x \cdot \sin x}{2 \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2nx + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin((2n+1)x + x) - \sin((2n+1)x - x))}{2 \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2nx + \sin(2n+2)x - \sin 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin 2(n+1)x}{2 \sin x}\end{aligned}$$

me zbatimin e formulës për transformimin e prodhimit të funksioneve trigonometrike në shumë domethënë $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$.

3. Udhezim: $33333 = 3(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)$ etj.

4.3.

1. $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \stackrel{s.i.}{>} n \cdot 2 = n + n \geq 1 + n$. **2.** $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geq 10(n+1)^2$.

3. $a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n} < \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} < \sqrt{3}$.

4.4.

1. Për $n = k$ duke zëvendësuar te $a_n = n^3 + 5n$ fitohet

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 5(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = \\ &= \underbrace{3A}_{s.i.} + 3(k^2 + k + 2) = 3(A + k^2 + k + 2)\end{aligned}$$

2. Për $n = k$, duke zëvendësuar te $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ e fitojmë shprehjen

$$5 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k + 1) + \underbrace{2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4}_{25m}. \quad \text{Me SIM vërtetohet se} \quad \text{plotpjesëtohet me 5,}$$

prej ku vijon $2^{k+2} \cdot 3^k + 1 = 5A$ ose $5 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k + 1) + 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 = 25(A + m)$.

3. $3^{n+1} \cdot 5^{n+1+1} + 2^{n+1+3} = 15 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+3} = 13 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} + 2(3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3})$.

4. Udhezim: $(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n+1)n^{4k-1} = (n+1)\left((n^3 - n^2 + n - 1)^{k+1} + n^{4k-1}\right)$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Për $n = k + 1$

$$2 + 4 + \dots + 2k + 2(k+1) = \underbrace{k(k+1)}_{s.i.} + 2(k+1) = (k+1)(k+2).$$

2. Për $n = k + 1$

$$\begin{aligned}2^2 + 4^2 + \dots + (2k)^2 + (2(k+1))^2 &= \frac{2}{3}k(k+1)(2k+1) + 4(k+1)^2 = \\ &= \frac{2}{3}[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2] = \frac{2}{3}[(k+1)(k(2k+1) + 6k + 6)] = \\ &= \frac{2}{3}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{2}{3}(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6) = \\ &= \frac{2}{3}(k+1)[2(2k+3) + k(2k+3)] = \frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+3).\end{aligned}$$

3. Për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \frac{k}{\underbrace{3k+1}_{\text{s. i.}}} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+3k+k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}. \end{aligned}$$

4. Për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} &= \frac{k}{\underbrace{4k+1}_{\text{s. i.}}} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \\ &= \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+4k+k+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k(k+1)+(k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}. \end{aligned}$$

6. Për $n = k + 1$

$$5^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = (3+2)5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot \underbrace{(5^k + 2^{k+1})}_{\text{supozimi induktiv}} = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 3m.$$

7. Për $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} &= 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 5^2 + 2^{3n+1} \cdot 2^3 = 75 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= \underbrace{(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})}_{\text{supozimi induktiv}} + 72 \cdot 5^{2n+1} + 7 \cdot 2^{3n+1} = 17A + 3 \cdot 24 \cdot 5^{2n+1} + 7 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= 17A + 3 \cdot 24 \cdot 5^{2n+1} + (24-17) \cdot 2^{3n+1} = 17A + 24 \cdot \underbrace{(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})}_{\text{supozimi induktiv}} - 17 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= 17A + 24 \cdot 17A - 17 \cdot 2^{3n+1} = 17(25A - 2^{3n+1}). \end{aligned}$$

NJËSIA MODULARE 5

5.1.

1. **a)** $\text{Re}(z)=4, \text{Im}(z)=2$; **b)** $\text{Re}(z)=-3, \text{Im}(z)=4$; **c)** $\text{Re}(z)=3, \text{Im}(z)=-2$;
ç) $\text{Re}(z)=-4, \text{Im}(z)=\frac{1}{2}$; **d)** $\text{Re}(z)=\sqrt{2}, \text{Im}(z)=1+\sqrt{3}$; **dh)** $\text{Re}(z)=1+\sqrt{2}, \text{Im}(z)=1$;
e) $\text{Re}(z)=-3, \text{Im}(z)=0$; **f)** $\text{Re}(z)=0, \text{Im}(z)=-3$.
2. **a)** $z = 3 + \frac{1}{2}i$; **b)** $z = -\frac{1}{4} + (2-\sqrt{2})i$; **c)** $z = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}i$; **ç)** $z = m+1 + (n-\sqrt{2})i$.
3. **a)** $z = -2+i$; **b)** $z = -5i$; **c)** $z = -4$; **ç)** $z = 2+2\sqrt{3}i$.

5.2.

1. **a)** $r=2, \varphi=\frac{11\pi}{6}$; **b)** $r=\sqrt{2}, \varphi=\frac{7\pi}{4}$; **c)** $r=2, \varphi=\frac{5\pi}{3}$; **ç)** $r=4, \varphi=\frac{\pi}{3}$; **d)** $r=\sqrt{2}, \varphi=\frac{\pi}{4}$.
2. **a)** $z_1 = \left| \frac{1}{\cos \alpha} \right| (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$; **b)** $2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$;
c) $z_3 = 3(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$.
3. **a)** $\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$; **b)** $-4 + 4i\sqrt{3}$.
4. **a)** $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; **b)** $3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$; **c)** $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;
ç) $3(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$; **d)** $\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}$. 5. $\bar{z} = z^{-1} = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$.
6. $\text{Im}(z)=0$ ose $\text{Re}(z)=0$.

5.3.

$$1. \text{ a) } \sqrt{6}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}) = \sqrt{6}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})$$

$$\text{dhe } \sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2});$$

$$\text{b) } \sqrt{2}(\cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}) = -1 - i \quad \text{dhe} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}(1 - i).$$

$$2. \text{ a) } z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3}); \quad \text{b) } \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}); \quad \text{c) } \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}).$$

3. a) Moduli nuk ndryshon, argumenti zmadhohet për $\frac{\pi}{2}$;

b) Moduli nuk ndryshon, argumenti zvogëlohet për $\frac{\pi}{2}$. 4. a) $15i$; b) -24 ; c) $\sqrt{}$

$$5. \text{ a) } i; \quad \text{b) } \frac{1}{5}(1 + i\sqrt{3}); \quad \text{c) } \frac{\sqrt{2}}{3}(1 + i); \quad \text{ç) } \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

$$6. \text{ a) } z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ dhe } z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad \text{b) } z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ dhe } \frac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

5.4.

$$1. \text{ a) } 2 + 2i\sqrt{3}; \quad \text{b) } 8i; \quad \text{c) } -16\sqrt{3} + 16i. \quad 2. 1. \quad 3. 0. \quad 4. \text{ a) } -22i\sqrt{2}; \quad \text{b) } 0; \quad \text{c) } 0.$$

$$5. \text{ a) } 2^{30}; \quad \text{b) } -2^{20}.$$

5.5.

$$1. \text{ a) } \{-1 - i\sqrt{3}, 2, -1 + i\sqrt{3}\}; \quad \text{b) } \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, i\right\};$$

$$\text{c) } \left\{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i, \sqrt[3]{2}i\right\}.$$

$$2. \text{ a) } \left\{\cos \frac{(3+4k)\pi}{8} + i \sin \frac{(3+4k)\pi}{8} \mid k=0,1,2,3\right\};$$

$$\text{b) } \left\{\sqrt[3]{4}(\cos \frac{(1+6k)\pi}{9} + i \sin \frac{(1+8k)\pi}{9}) \mid k=0,1,2\right\};$$

$$\text{c) } \left\{\sqrt[5]{16}(\cos \frac{(-2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(-2+6k)\pi}{15}) \mid k=0,1,2,3,4\right\}.$$

$$3. \text{ a) } \sqrt[6]{12} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} \right), k=0,1,2,3,4,5; \quad \text{b) } \{1+i, -1-i\};$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right), k=0,1.$$

$$4. \text{ a) } \cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k=0,1,2;$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right), k=0,1,2,3.$$

5.6.

4. Udhëzim: Paraqiti numrat në formën trigonometrike dhe pastaj shfrytëzoje formulën e Moavrit.

5. $z = \sqrt[3]{64} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$ 6. $z = 2^{10} \cos^{10} \frac{\alpha}{2} (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha).$

7. $\{a + ib, -a - ib, -b + ia, b - ia\}$, ku $a = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}, b = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$

8. Udhëzim: Paraqiti numrat në formën trigonometrike dhe pastaj shfrytëzoje formulën e Moavrit.

9. a) $\{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\};$ b) $\{2i, -2i, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\};$ c) $\{-3, 3, 3i, -3i\}.$

10. a) $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x};$ b) $\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}.$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

3. a) 13; b) 2; c) $\sqrt{6};$ ç) 1; d) 2; dh) $\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}.$ 4. a) 5; b) 10; c) $\sqrt{2 - 2 \cos \varphi}.$

6. a) $(\sqrt{3} + 1)(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ);$ b) $2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3});$ c) $3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2});$

ç) $3(\cos \pi + i \sin \pi).$

8. a) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ b) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ c) $\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ ç) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

d) $\frac{\pi}{2} - \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$ dh) $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ 9. a) 15i; b) -12; c) $i\sqrt{2}.$

10. $r = 2^n \left| \cos^n \frac{\alpha}{2} \right|, \varphi = \frac{n\alpha}{2}.$

11. a) r nuk ndryshon, kurse φ do të zmadhohet për $\frac{\pi}{2};$

b) r nuk ndryshon, kurse φ do të zmadhohet për $\frac{3\pi}{2};$

c) r do të zmadhohet 4 herë, por φ nuk ndryshon;

ç) r do të zmadhohet 2 herë, por φ do të zmadhohet për $\frac{3\pi}{2};$

d) r do të zmadhohet $\sqrt{2}$ herë, por φ do të zmadhohet për $\frac{\pi}{4};$

dh) r nuk ndryshon, kurse φ do të zmadhohet për $\frac{\pi}{3}.$

12. a) $i;$ b) $\frac{1}{5}(1 + i\sqrt{3});$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}(1 + i);$ ç) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$ 13. a) 1; b) $i;$ c) -1; ç) $\frac{1}{8}(1 + i).$

14. a) 2; b) $-\frac{5}{16};$ c) $\frac{1}{2^{10}};$ ç) $2^{10}.$ 16. a) $x_1 = 4i, x_2 = -4i;$ b) $x_1 = 2\sqrt{5}i, x_2 = -2\sqrt{5}i;$

17. a) $x_1 = 2 + 4i, x_2 = 2 - 4i;$ b) $x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{23}}{2}, x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{23}}{2};$

c) $x_1 = \frac{7 + i\sqrt{31}}{4}, x_2 = \frac{7 - i\sqrt{31}}{4};$ ç) $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};$ d) $x_1 = 1, x_2 = i.$

18. a) $x^2 - 4x + 5 = 0;$ b) $x^2 + 5 = 0.$

19. a) $x^2 - 4x + 13 = 0;$ b) $x^2 - 24x + 313 = 0;$ c) $x^2 - 2(1 + \cos \alpha)x + 2(1 + \cos \alpha) = 0.$

20. a) $\{-3\sqrt{3}i, 3\sqrt{3}i\}$; b) $\left\{z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$;
- c) $\left\{z_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{7} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{7} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$;
- ç) $\left\{-\sqrt[4]{\frac{25}{36}}, \sqrt[4]{\frac{25}{36}}, -\sqrt[4]{\frac{25}{36}}i, \sqrt[4]{\frac{25}{36}}i\right\}$; d) $\{-2i, 2i, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i\}$;
- dh) $\left\{-\sqrt[3]{2}i, \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right\}$;
- e) $\left\{z_k = \cos \frac{(2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(2+6k)\pi}{15} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$;
- f) $\left\{z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{(12k-1)\pi}{8} + i \sin \frac{(12k-1)\pi}{8}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$;
- g) $\left\{z_k = \sqrt[14]{2}\left(\cos \frac{(8k+3)\pi}{28} + i \sin \frac{(8k+3)\pi}{28}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$.

NJËSIA MODULARE 6

6.1.

1. $\gamma = 49^0 25'$, $b = 37,12$, $c = 29,01$. 2. $\gamma = 58^0 46'$, $a = 10,36$, $b = 58,65$.
4. $3:5$. 5. $6,5$. 6. $\overline{BC} = 21\text{cm}$, $R = 7\sqrt{3}\text{cm}$.

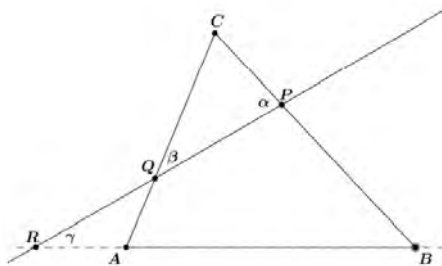
6.2.

1. $a = 16,62$, $\beta = 89^0 16'$, $\gamma = 46^0 14'$. 2. $c = 741,3$, $\alpha = 59^0 48'$, $\beta = 59^0 57'$.
4. $95^0 4' 47''$. 5. 120^0 . 6. $a = \sqrt{13}$, $b = 3$, $c = 4$ ose $a = \sqrt{13}$, $b = 4$, $c = 3$.

6.3.

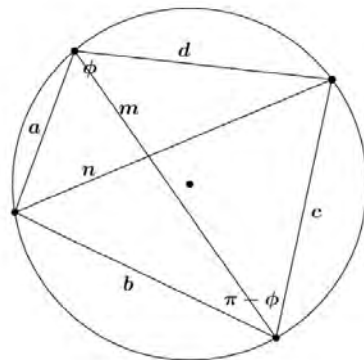
1. $\alpha = 52^0$, $c = 16,33$, $a = 11,67$, $b = 13,09$. 2. $a = 36,014$, $b = 28,014$, $c = 52,65$, $\gamma = 110^0$.
3. $c = 6,09$, $\alpha = 54^0 42'$, $\beta = 29^0 18'$. 4. $\alpha = 86^0 18' 17''$, $\beta = 48^0 27' 20''$, $\gamma = 45^0 14' 23''$.
5. $\alpha = 54^0 12'$, $\beta = 46^0 36'$, $\gamma = 79^0 12'$. 6. $a = b = c = 30$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$.

6.4.



1. $\angle CPQ = \alpha$, $\angle CQP = \beta$, $\angle PRB = \gamma$, pra prej teoremës së sinusit

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{PB}} = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \frac{\overline{QA}}{\overline{RA}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$



2. Prej teoremës së kosinusit $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - \varphi)$, prej ku $n^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}$ dhe $m^2 = \frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}$. me shumëzimin e këtyre barazime fitohet gjykimi, dmth $mn = ac + bd$.
3. $140,7\text{cm}^2$. 4. 15.

6.5.

1. $\frac{125}{12}\text{cm}^3$. 2. 1. 3. 12π . 4. a) $PR = 33,4\text{cm}$; b) $\angle PER = 69^\circ$.
5. a) $\overline{AX} = 5\text{cm}$, $\overline{AY} = 2\sqrt{10}\text{cm}$, $\overline{XY} = \sqrt{29}\text{cm}$. b) $\angle XAY = 55^\circ 18'$. c) $P = 13\text{cm}^2$.

6.6.

1. $\approx 30\text{N}$. 2. 362 metra. 3. 3068 metra. 4. 1074,8km. 5. $\approx 100\text{m}$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. $s = 4$. 2. $a = 6,3\text{cm}$. 3. $b = 21,4\text{cm}$. 4. $10,4\text{cm}$. 5. $8,1\text{cm}$. 6. $8,2\text{cm}$. 7. $a = \sqrt{39}$.
10. 31145m^2 .

NJËSIA MODULARE 7

7.1.

1. Udhëzim. Pika O shtrihet në segmentin AB dhe $\overline{OA} = \overline{OB}$.
2. a) Po; b) Jo; c) Po; d) Jo. 3. Të sakta janë gjykimet nën a), c) dhe d).
4. $\vec{a} = \vec{c}$ dhe $\vec{m} = \vec{p}$.

7.2.

1. $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$. 2. a) $\overline{BC}$; b) $\overline{DB}$; c) $\vec{0}$; d) $\overline{AB}$.
3. $\overline{BC} = \overline{FE} = \overline{AB} + \overline{AF} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{CD} = \overline{AF} = \vec{b}$ dhe $\overline{ED} = \overline{AB}$

7.3.

2. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 10$. 3. a) $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$; d) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$.
4. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overline{BC} = -\vec{b} - \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ dhe $\overline{DA} = \vec{a} + \vec{b}$.

7.4.

4. a) $19\vec{a} + 4\vec{b}$; b) $9\vec{a} + 24\vec{c}$. 5. a) $\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$; b) $\vec{x} = \frac{1}{5}\vec{b}$.

6. Udhëzim. Pasi M është mesi i segmentit AB , por N është mesi i segmentit CD ,

kemi $2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD}$, pra
 $2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} =$
 $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, dhe
 $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

7.5.

1. a) $x = 3, y = -3$; b) nuk ekzistojnë të atillë x dhe y . 2. $p = 0$.

4. Udhëzim: Prej $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AN} + \lambda \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\vec{a} + \lambda\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$ dhe

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \mu\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ kemi $\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \mu\right)\vec{a} = \left(-\lambda - \frac{\mu}{2}\right)\vec{b}$. $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.

7.6.

1. a) $a_x = -2, a_y = 1, a_z = -1$; b) $a_x = -3, a_y = 4, a_z = 3$; c) $a_x = 1, a_y = 0, a_z = -1$;
 ç) $a_x = 0, a_y = 1, a_z = 6$.

2. a) $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$; b) $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$; c) $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j}$; ç) $\vec{a} = \vec{j}$.

7.7.

1. a) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (5, -4, 0)$; b) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (3, 6, 5)$.

2. a) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (-6, 6, 10)$; b) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (2, 4, -3)$.

3. a) $2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 = (-3, 3, 8)$; b) $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (1, 6, -7)$; c) $4\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (-1, -9, 9)$.

4. a) $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3 = (-10, 20, 2)$; b) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = (1, -5, -7)$;

c) $-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 4\vec{a}_4 = (3, 9, -6)$.

7.8.

1. a) $M(-1, -1, 1)$; b) $M(1, 0, -1)$. 2. $B(3, 2, -1)$.

3. a) $M\left(\frac{12}{5}, 2, \frac{14}{5}\right)$; b) $M\left(\frac{18}{5}, 2, \frac{16}{5}\right)$; c) $M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$.

4. $S_{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -9\right)$, $S_{BC}\left(\frac{9}{2}, -5, 5\right)$, $S_{AC}\left(-4, \frac{11}{2}, 7\right)$.

7.9.

1. a) 7; b) 4; c) 49. 2. a) -10; b) 16; c) 25. 3. a) Pozitiv; b) Negativ.

4. 36. 5. a) 72; b) 63; c) 27.

7.10.

1. $|\vec{p}| = \sqrt{11}$. 2. $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{5\sqrt{133}}{133}$. 3. $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{27\sqrt{2}}{2\sqrt{527}}$.

4. Le të jetë ABC trekëndësh kënddrejtë me kënd të drejtë pranë kulmit C . Nëse $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$,
 $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, atëherë $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (bën vizatim). Kemi

$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, pasi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

5. $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

7.11.

1. a) 14; b) -8. 2. a) $\sqrt{41}$; b) $\sqrt{14}$. 3. a) $\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$. 4. $\frac{\pi}{3}$. 5. a) Jo; b) Po.

7.12.

1. Prej $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ kemi $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atëherë

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 30\sqrt{3}.$$

$$2. \vec{a} \times \vec{b} = -4\vec{p} + 26\vec{q} + 14\vec{r}.$$

3. Prej $\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{1}{4}$ kemi $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Atëherë

$$|\vec{m} \times \vec{n}| = |\vec{m}| |\vec{n}| \sin(\vec{m}, \vec{n}) = 4\sqrt{15}.$$

7.13.

1. $P = 2\sqrt{2}$. 2. $P = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. 3. $h = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. 4. $t = -\frac{1}{21}$.

7.14.

$$1. \text{ a) } \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -8); \text{ b) } \vec{a} \times \vec{b} = (6, 2, 3).$$

$$2. \text{ a) } \vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7); \text{ b) } (2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = (10, 2, 14); \text{ c) } (2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) = (-20, -4, -78).$$

$$3. \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\sqrt{17}}{21}. \text{ 4. } S = \sqrt{286}. \text{ 5. } S = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \text{ 6. } x = 8, y = 4.$$

7.15.

$$2. 1. 3. 56. 4. [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 48.$$

$$5. [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

7.16.

$$1. V = 6\sqrt{3}. \text{ 2. } V = 120. \text{ 3. } V = \frac{5\sqrt{2}}{3}. \text{ 4. Jo.}$$

7.17.

$$1. [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -17. \text{ 2. } H = \frac{10\sqrt{59}}{59}. \text{ 3. } |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 32. \text{ 4. Jo. 5. } t_1 = 1, t_2 = 1 + \sqrt{2}, t_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dhe $\vec{d}$ formojnë katërkëndësh nëse shuma e tyre është vektor zero. Prandaj, $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}$.

$$2. \vec{CB} = 2\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{DC} = -\vec{b}, \vec{DE} = -\vec{a} \text{ dhe } \vec{EF} = 2\vec{a} - 2\vec{b}.$$

3. Pasi $ODEF$ është paralelogram, kemi se $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OF}$. Atëherë

$$\begin{aligned} \vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} &= (\vec{AO} + \vec{OD}) - (\vec{BO} + \vec{OE}) + (\vec{CO} + \vec{OF}) = \\ &= \vec{OD} + \vec{OD} - (\vec{OE} + \vec{OE}) + \vec{OF} + \vec{OF} = \\ &= (\vec{OD} + \vec{OF}) + (\vec{OD} + \vec{OF}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{OE} + \vec{OE} - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{0} \end{aligned}$$

4. $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$. 5. $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$, $B\left(\frac{11}{3}, 7, -13\right)$.

6. $k = -\vec{b} \cdot \vec{c}$. 7. $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b})$. 8. $\frac{\pi}{2}$. 9. 4 dhe $\sqrt{7}$

10. a) $\vec{a} \times \vec{b} = (4, 5, 7)$; b) $\vec{b} \times \vec{a} = (-4, -5, -7)$; c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = (-8, -10, -14)$.

11. Vektori i kërkuar le të jetë $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Atëherë $\vec{a} \times \vec{b} = 2\lambda\vec{j} - 4\lambda\vec{k}$ dhe

$$\vec{c} \times \vec{d} = (2z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - 2x)\vec{k}. \text{ Prej kushtit të parë kemi } \begin{cases} 2z - y = 0 \\ x - z = 2\lambda \\ y - 2x = -4\lambda \end{cases} \text{ kurse prej}$$

$$\text{kushtit të dytë kemi } \begin{cases} 2z - y = 0 \\ x - 2z = \lambda \\ 2x - 2y = 2\lambda \end{cases}. \text{ Prej të dy kushteve kemi } x = 5, y = 6, z = 3,$$

përkatësisht $\vec{d} = 5\lambda\vec{i} + 6\lambda\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$.

12. Le të jetë $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Prej kushtit të detyrës kemi $\vec{p} \cdot \vec{a} = x + y + z = 3$,

$p \times b = -zi + zj + (x - y)k = i - j$, prej ku vijon $x = y = 2$, pra $\vec{p} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

13. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -7\vec{i} - 2\vec{j} - 21\vec{k}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 6\vec{i} + 60\vec{j} + 63\vec{k}$.

14. $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{3}$, $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}}$. 15. $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{286}}{2}$.

16. $S = 5\sqrt{3}$. 17. a) $x = 2$ dhe $x = -1$; b) Nuk ekziston x për të cilin vektorët do të jenë paralel.

18. $t = 3$. 19. $V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -6$. 20. $H = \frac{23}{\sqrt{158}}$.

NJËSIA MODULARE 8

8.1

1. a) 7; b) 0; c) 1; d) $-2b^3$.

2. a) $x_1 = 3, x_2 = -3$; b) $x_1 = 0, x_2 = 1$; c) $x_1 = -2, x_2 = -\sqrt{5}, x_3 = \sqrt{5}$.

3. a) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; b) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$; c) $x \in (-7, 1)$.

8.2

1. a) 4; b) 33;

c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$;

d) $(a - b)(b - c)(c - a)$.

2. a) $x_1 = 3, x_2 = 2$; b) $x_1 = -1, x_2 = -2$; c) $x_1 = a, x_2 = b$.

3. a) $x^2 + y^2 + z^2 + 1$; b) 0; c) $ax^2 + bx + c$.

4. a) 1; b) 2; c) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. 5. a) 0; b) 20; c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

8.3.

1. a) 0; b) 6; c) 0.

3. a) Udhëzim. Rreshtit të parë shtoj rreshtin e dytë, kurse pastaj e shumëzuar me -2 shtoj

rreshtit të tretë. Fitohet determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. Në fund, rreshti i dytë i

shumëzuar me $\frac{3}{2}$ Shtojë reshtin e tretë. **Përgjigje.** 5; **b)** 0;

c) Udhëzim. Zëvendësoi vendet e rreshtit të parë dhe të dytë. **Përgjigje.** 2.

8.4.

1. a) $x=1, y=-2, z=1$; **b)** nuk ka zgjidhje; **c)** $x=\frac{5}{11}(1-t), y=\frac{1}{11}(9+13t), z=t, t \in \mathbb{R}$.

2. Determinanta e sistemit është $\Delta = -a^2 + 3a - 3 \neq 0$, për çdo $a \in \mathbb{R}$. Sistemi ka

zgjidhje të vetme $x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 3a + 3}, y = \frac{-1}{a^2 - 3a + 3}, z = \frac{5a + 38}{2(a + 2)}$, ku a është parametër.

3. a) $x=2t, y=-3t, z=5t, t \in \mathbb{R}$; **b)** Pasi $\Delta \neq 0$, sistemi nuk ka zgjidhje jozero. Domethënë $x=0, y=0, z=0$, është zgjidhje e vetme.

8.5

1. a) Prej rendit 3×4 ; **b)** Rreshti i parë $(41, 1, 16, 0)$, dhe kolona e tretë $(16, -9, -4)$;

c) $a_{13}=16, a_{24}=10, a_{33}=-4, a_{32}=8, a_{14}=5$ dhe $a_{21}=62$.

2. a) Jo; **b)** Jo. **3.** $a=-3, b=4, c=-1, d=2$. **4.** $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

5. a) 3×3 ; **b)** 1, 3 dhe -4. **6.** $\begin{bmatrix} 40 & 60 & 20 & 30 \\ 50 & 50 & 15 & 35 \\ 40 & 45 & 25 & 40 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \\ 35 & 40 & 15 & 25 \end{bmatrix}$. **7. c)** Jo.

8.6

1. $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 0 \\ 24 & -3 & 2 \\ -7 & -7 & 3 \end{bmatrix}$. **2.** $0,5 \cdot A = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ -0,5 & 2 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$.

3. a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 3 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 13 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. **4.** $x=5, y=0, z=2, t=3$.

8.7

1. AB e ka rendin $m \times m$, por BA ka rend $n \times n$. Nëse $m \neq n$, atëherë $AB \neq BA$.

2. a) $\begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 880 & 930 \\ 700 & 720 \end{bmatrix}$.

8.8

1. a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$; ç) Nuk është inversibile.
2. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$; b) Nuk është inversibile; c) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
3. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. 4. $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n})$.

8.9

1. $X = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. 4. $X = \begin{bmatrix} 14 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. 5. $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 6. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

8.10

1. a) $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; b) $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -10 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. a) $x = 4, y = -2, z = 1$; b) $x = 3, y = -2, z = 5$; c) $x = 1, y = 2, z = 3$;
ç) $x = 1, y = 5, z = 1$.
3. Duhet të prodhohen 130 copa prej prodhimit P_1 , 40 copa prej prodhimit P_2 dhe 50 copa prej prodhimit P_3 .
4. Kilogram krastaveca kushtojnë 30 denarë, kilogram domate kushtojnë 20 denarë dhe kilogram qep kushtojnë 40 denarë.

8.11

1. Nuk ka zgjidhje. 2. $x = 3, y = -2, z = 2$. 3. $x = y = z = 1$. 4. $x = 1, y = 2, z = -1$.
5. $x = 2, y = -3, z = 2$. 6. $x = 1, y = -2, z = 1$. 7. $x = 3, y = -2, z = 1$.
8. $x = 5, y = 2, z = -1$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) -1 , b) 1 . 5. 1. 6. $x \in (-6, -4)$. 7. $a = 12$.
8. a) $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{b+c}{2}$; b) $x = \frac{a-b+c}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$.
9. Nëse $a \neq 1$ dhe $a \neq -2$, zgjidhja e vetme është $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$.
Nëse $a = -2$, sistemi nuk ka zgjidhje, kurse nëse $a = 1$, atëherë zgjidhje është çdo treshe (x, y, z) ashtu që $x = y + z = 1$.
10. $a = b$. 11. $x = bc$, $y = ac$, $z = ab$. 12. $x = y = z = t = 0$.
13. $(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$16. \text{ a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}; \text{ b) } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ c) } -\frac{1}{a(a+3)} \begin{bmatrix} -(a+2) & 1 & 1 \\ 1 & -(a+2) & 1 \\ 1 & 1 & -(a+2) \end{bmatrix}.$$

$$17. \text{ a) } X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \text{ b) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \text{ c) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \text{ ç) } X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$18. \text{ a) } AX = B, A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & -10 \\ 4 & 10 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 28 \\ -26 \\ 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{ b) } AX = B, A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -9 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 \\ -21 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$19. \text{ a) } x = 3, y = -2, z = 1; \text{ b) } x = 5, y = 2, z = -1. \quad 20. \begin{bmatrix} 500 & 100 & 600 \\ 300 & 700 & 400 \\ 200 & 400 & 800 \end{bmatrix}.$$

$$21. A - B = \begin{bmatrix} -300 & 200 & -300 \\ -100 & 400 & 500 \end{bmatrix} \text{ prandaj familja } A \text{ shpenzon } 300 \text{ kilovat orë}$$

më pak se familja B në muajt mars dhe maj dhe 200 kilovat orë më shumë në prill të vitit 2021. Në vitin 2022 familja A shpenzon 100 kilovat orë më pak se familja B në muajin mars, 400 kilovat orë më shumë në muajin prill dhe 500 kilovat orë më shumë në maj.

$$22. AB = \begin{bmatrix} 1840 & 1510 \\ 1240 & 1230 \end{bmatrix}.$$

23. $x = 3$, $y = 2$ dhe $z = 1$, ku x është çmimi i sasisë së ngjyrës, y është çmimi i furçës dhe z është çmimi i njësisë së sasisë së pëlhurës.

24. 16 trëndafil, 2 tulipan dhe 6 gerber.

NJËSIA MODULARE 9

9.1

1. **a)** $f(-1) = (-1)^4 - 2(-1) + 4 = 7$; **b)** $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$; **c)** $f(2) = 2^4 - 4 + 4 = 16$.

2. **a)** Po, pasi kanë fushë të njëjtë të përkufizimit dhe kanë veprim të njëjtë;

b) Jo, pasi kanë veprim të ndryshëm. Më preciz, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, për çdo $x \in \mathbb{R}$, ndërsa $g(x) = x$, për çdo $x \in \mathbb{R}$.

3. **a)** $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty)$; **b)** $D_f = [-1, \infty)$; **c)** $D_f = (-1, 1)$.

4. **a)** $D_f = \mathbb{R}$; **b)** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; **c)** $D_f = (-\infty, 1]$.

5. **a)** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, **b)** $D_f = \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$. **c)** $D_f = [1, 4]$.

7. **a)** $x = -1$; **b)** $x = 0$; **c)** $x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; **ç)** Funkzioni nuk ka zero.

8. $(f + g)(x) = x^3 + x + 1$, për çdo $x \in \mathbb{R}$, $(fg)(x) = x^3(x + 1)$, për çdo $x \in \mathbb{R}$,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3}{x+1}$, për çdo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

9.2.

1. a) $a = 6, b = -1$; b) $a = -2, b = 1$; c) $a = \sqrt{3}, b = -\frac{1}{2}$; ç) $a = \frac{3}{7}, b = -\frac{5}{7}$.

2. a) $x_0 = 3$; b) $x_0 = -\frac{9}{10}$; c) $x_0 = 4$; ç) $x_0 = -\frac{1}{7}$.

3. a) $a = 2$; b) $a = \frac{8}{3}$; c) $a = 1$.

4. Pika A nuk i takon grafikut të funksionit, pika B nuk i takon grafikut të funksioni, pika C nuk i takon funksionit, pika D i takon grafikut të funksionit.

5. a) Monotone rritëse; b) Monotone zvogëluëse; c) Monotone zvogëluëse.

9.3.

1. a) $f(x) = (x-1)^2 + 2$; b) $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$; c) $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

2. a) $x_1 = -3$ dhe $x_2 = 1$; b) $x = 3$; c) Funksioni nuk ka zero.

3. a) $T\left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$; b) $T(3, -2)$; c) $T(8, 4)$.

4. a) Monotonisht zvogëlohet në $(-\infty, -1)$, monotonisht rritet në $(-1, +\infty)$;

b) Monotonisht rritet në $(-\infty, -2)$, monotonisht zvogëlohet në $(-2, +\infty)$;

c) Monotonisht rritet në $(-\infty, 0)$, monotonisht zvogëlohet në $(0, +\infty)$.

5. a) $V_f = [0, +\infty)$; b) $V_f = [6, +\infty)$; c) $V_f = \left[-\infty, \frac{45}{4}\right]$.

9.5.

1. a) Po; b) Jo; c) Po; ç) Po.

2. a) $D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}^+$, grafiku i funksionit është vijë e vijueshme mbi boshtin x , e pret boshtin y në pikën $(0, 1)$, dhe pasi > 31 funksioni është rritës;

b) $D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}^+$, grafiku i funksionit është vijë e vijueshme mbi boshtin x , e pret boshtin y në pikën $(0, 1)$, dhe pasi $\frac{1}{3} < 1$ funksioni është zvogëluës.

c) $D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}^+$, grafiku i funksionit është vijë e vijueshme mbi boshtin x , e pret boshtin y në pikën $(0, 1)$, dhe pasi $5, 2 > 1$ funksioni është rritës;

ç) $D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}^+$, grafiku i funksionit është vijë e vijueshme mbi boshtin x , e pret boshtin y në pikën $(0, 1)$, dhe pa $0, 4 < 1$ funksioni është zvogëluës.

3. a) $D_f = \mathbb{R}$; b) $D_f = \mathbb{R}$; c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ç) $D_f = [0, +\infty)$.

4. a) Funksioni është rritës; b) Funksioni është zvogëluës; c) Funksioni është zvogëluës;

5. ç) Funksioni është zvogëluës.

9.6

1. a) Po; b) Po; c) Jo.

2. a) $D_f = \mathbb{R}^+, V_f = \mathbb{R}, x = 1$ është zero e funksionit, dhe pasi $5 > 1$ funksioni është rritës;

b) $D_f = \mathbb{R}^+, V_f = \mathbb{R}, x = 1$ është zero e funksionit, dhe pasi $0,3 < 1$ funksioni është zvogëluës;

c) $Df = \mathbb{R}^+$, $Vf = \mathbb{R}$, $x = 1$ është zero e funksionit, dhe pasi $\frac{1}{7} < 1$ funksioni është zvogëlues.

3. a) $D_f = (0, +\infty)$; b) $D_f = (-9, +\infty)$; c) $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;

ç) $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

4. a) Funksioni është rritës; b) Funksioni është rritës; c) Funksioni është zvogëlues.

9.7.

1. $(f \circ g)(x) = \ln(e^{2x-3} + 1)$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = e^{2 \ln(x+1)x-3}$, $D_{g \circ f} = (-1, +\infty)$.

2. a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; b) $f^{-1}(x) = \log_2 x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$;

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ç) $f^{-1}(x) = x^3$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$.

9.8.

1. a) $a_n = 3n - 1$; b) $a_n = \frac{3n+1}{n}$; c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

9.9.

1. a) $n_0 = 9$; b) $n_0 = 99$; c) $n_0 = 999$. 2. a) $+\infty$; b) kah numër real të fundshëm; c) $-\infty$.

3. $n = 4$. 4. Jo.

5. Vargu $a_n = (-1)^n$ nuk ka kufi, kurse vargu $a_n^2 = (-1)^{2n} = 1$ ka kufi. Vargu

$a_n = \frac{1}{n}$ ka kufi, edhe vargu $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$ ka kufi.

9.10.

1. $\frac{7}{9}$. 2. 0. 3. 8. 4. $\frac{1}{16}$. 5. -1. 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\frac{1}{2}$. 8. ∞ . 9. 1.

9.11.

3. a) I vijueshëm si kompozicion i funksioneve të vijueshme;

b) I vijueshëm si shumë i funksioneve të vijueshme;

c) I vijueshëm si kompozicion i funksioneve të vijueshme;

ç) I vijueshëm si prodhim i funksioneve të vijueshme.

4. a) $x = -1$; b) $x = 2$ dhe $x = 3$; c) $x = \pm 1$.

9.12.

2. $\delta = \frac{1}{3000}$. 3. a) $\frac{1}{4}$; b) -5; c) $\log_2 3$. 4. a) 4; b) -4; c) $\sqrt{2}$.

5. a) 3; b) $\frac{1}{3}$; c) 2; ç) $\frac{7}{4}$; d) 6, dh) -3. 6. a) -13; b) 4; c) 5. 7. a) 6; b) 4; c) 2.

8. a) 3; b) $\frac{5}{2}$; c) -1. 9. a) -7; b) $\frac{1}{6}$; c) $-\frac{3}{5}$. 10. a) -2; b) $\frac{7}{2}$; c) $\frac{15}{11}$.

11. a) $\frac{1}{4}$; b) -1; b) -2. 12. a) $-\frac{1}{12}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) 4.

13. a) $\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{1}{2}$; c) -2; ç) 1; d) 0; dh) $+\infty$. 14. a) 0; b) 1; c) -1; ç) 0; d) 0; dh) 0.

15. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

9.13.

1. a) e ; b) e^{-2} ; c) e^6 ; d) e^6 . 2. a) 1; b) 3; c) $\frac{1}{a}$; d) 1; e) 1; f) 3; g) 1.

3. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{a+1}{3a^2}$; c) $3x^2$; d) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

9.14.

1. a) Asimptotë vertikale $x=1, x=-1$, asimptotë e pjerrët $y=x$;

b) Asimptotë horizontale $y=1$; c) asimptotë vertikale $x=-1$.

2. a) Asimptotë horizontale $y=0$; b) Nuk ka asimptota;

c) Asimptotë horizontale $y=0$ dhe asimptotë vertikale $x=-1$.

3. Për $k=2$, asimptotë e pjerrët $y=2x-3$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) $D_f = [-1, 3]$; b) $D_f = (0, 4)$.

2. a) Funksioni monotonisht zvogëlohet; b) Funksioni monotonisht rritet;

c) Funksioni monotonisht rritet; d) Funksioni monotonisht rritet.

3. a) $(-1, 0)$ dhe $(1, 0)$; b) $(-3, 0)$ dhe $(3, 0)$; c) Grafiku nuk ka pikëprerje me boshtin x .

4. a) $k > -\frac{3}{2}$; b) $k > 5$.

5. a) $T(1, 3)$, funksioni monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 1)$ dhe monotonisht rritet në intervalin $(1, +\infty)$, $V_f = [3, +\infty)$;

b) $T(-1, -7)$, funksioni monotonisht rritet në intervalin $(-\infty, -1)$ dhe monotonisht zvogëlohet në intervalin $(-1, +\infty)$, $V_f = (-\infty, -7]$;

c) $T(0, 5)$, funksioni monotonisht rritet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe monotonisht zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$, $V_f = (-\infty, 5]$.

7. a) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe rritet në intervalin $(0, +\infty)$, ka zero në $x=0$, grafiku është simetrik në lidhje me boshtin y , dhe kalon nëpër pikat $(-1, 1)$, $(0, 0)$ dhe $(1, 1)$;

b) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$, rritet në gjithë drejtëzën reale, ka zero $x=0$, grafiku është simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave, dhe kalon nëpër pikat $(-1, -1)$, $(0, 0)$ dhe $(1, 1)$;

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, rritet në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$, nuk ka zero, grafiku është simetrik në lidhje me boshtin y , dhe kalon nëpër pikat $(-1, 1)$, dhe $(1, 1)$;

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zvogëlohet në gjithë fushën e përkufizimit, nuk ka zero, grafiku është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave, dhe kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1, 1)$;

e) $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, rritet në gjithë fushën e përkufizimit, ka zero në $x=0$, grafiku kalon nëpër pikën $(1, 1)$;

f) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$, rritet në gjithë fushën e përkufizimit, ka zero në $x=0$, grafiku kalon nëpër pikat $(-1, -1)$ dhe $(1, 1)$.

- 10. a)** $f^{-1}(x) = \frac{8}{4x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$; **b)** $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
c) $f^{-1}(x) = (x-1)^3, x \in \mathbb{R}$; **ç)** $f^{-1}(x) = \lg(x-3) + 2, x \in (3, +\infty)$.
11. a) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$; **b)** $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; **c)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}$. **12.** $n_0 = 697$. **15.** 2. **16.** $\frac{2}{5}$.
17. 2. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** 1. **20.** $-\frac{5}{2}$. **22. a)** 3; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $\frac{1}{4}$; **ç)** $\frac{1}{2}$; **d)** 2; **dh)** $4a\sqrt{a-1}$.
23. a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** 2. **24. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** 0; **c)** $\frac{10}{7}$. **25.** $\frac{1}{e^2}$. **26.** e^2 . **27.** $\frac{1}{e}$. **28.** e .
29. a) Asimptota vertikale $x = 2$, asimptota horizontale $y = 1$;
b) Asimptota vertikale $x = 3$, asimptota e pjerrët $y = x + 2$;
c) Asimptota vertikale $x = 0$, asimptota e pjerrët $y = x + 1$;
ç) Asimptota horizontale $y = 0$; **d)** Asimptotat vertikale $x = -y = -x\sqrt{3}$ dhe $x = \sqrt{3}$,
dh) Asimptota e pjerrët $y = \frac{1}{2}x$, **e)** asimptota horizontale $y = -1$ dhe $y = 1$;
f) Asimptota horizontale $y = 0$.

PËRMBAJTJA

1.SISTEMI I BARAZIMEVE KATRORE ME DY TË PANJOHURA	5
1.1. Sistem prej një barazimi katror dhe barazimi linear me dy të panjohura	5
1.2. Sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura	9
1.3. Sistemi prej dy barazimeve katrore me dy të panjohura prej të cilave njëri është homogjen	12
DETYRA PËR PËRSËRITJE	17
 2.SISTEMET E PABARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA	19
2.1. Barazimi linear me dy të panjohura	19
2.2. Pabarazimet lineare me dy të panjohura	20
2.3. Sistemi prej dy pabarazimeve lineare me dy të panjohura.....	24
2.4. Paraqitja grafike e sistemit prej më shumë pabarazimeve lineare me dy të panjohura dhe zbatimi	27
DETYRA PËR PËRSËRITJE	34
 3.LLOGARIA E INTERESIT TË PËRBËRË	36
3.1. Konceptet për interesin e përbërë.....	36
3.2. Formulatat për njehsimin e interesit të përbërë	39
3.3. Zbatimi i interesit të përbërë	41
DETYRA PËR PËRSËRITJE.....	43
 4.INDUKSIONI MATEMATIKOR....	44
4.1. Induksioni matematikor... ..	44
4.2. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të identiteteve	47
4.3. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të pabarazimeve.....	49
4.4. Zbatimi i SIM gjatë vërtetimit të plotpjesëtueshmërisë	50
DETYRA PËR PËRSËRITJE	51
 5.NUMRAT KOMPLEKS	53
5.1. Përsëritje për numrat kompleks në formën algjebrike	53
5.2. Koncepti për formën trigonometrike dhe eksponenciale të numrit kompleks	57
5.3. Operacionet me numra kompleks në formën trigonometrike	62
5.4. Fuqizimi i numrit kompleks në formën trigonometrike. Formula e Moavrit	64
5.5. Rrënjëzimi i numrave kompleks	66
5.6. Zbatimi i numrave kompleks	69
DETYRA PËR PËRSËRITJE	74
 6.ZGJIDHJA E ÇFARËDO TREKËNDËSHI	76
6.1. Teorema e sinusit.	76
6.2. Teorema e kosinusit.	80
6.3. Teorema e tangensit. Formulatat e Ojlerit... ..	81
6.4. Zbatimi i teoremave në planimetri	84
6.5. Zbatimi i teoremave në stereometri	86
6.6. Zbatimi i teoremave në mekanikë dhe në jetën praktike	89
DETYRA PËR PËRSËRITJE	92
 7.VEKTORËT NË HAPËSIRË	93
7.1. Koncepti për vektor në hapësirë	93
7.2. Mbledhja e vektorëve.....	95
7.3. Zbritja e vektorëve	99
7.4. Shumëzimi i vektorit me skalar.	100
7.5. Pjesëtimi i vektorëve kolinear.....	102

7.6. Koordinatat e vektorit...	104
7.7. Operacionet me vektorët në formën koordinative.....	107
7.8. Ndarja e segmentit në raport të dhënë	109
7.9. Prodhimi skalar i vektorëve	111
7.10. Zbatimi i prodhimit skalar të vektorëve.....	112
7.11. Prodhimi skalar i vektorëve në formën koordinative.....	115
7.12. Prodhimi vektorial i vektorëve	117
7.13. Zbatimi i prodhimit vektorial të vektorëve.....	119
7.14. Prodhimi vektorial në formën koordinative	121
7.15. Prodhimi i përzier i vektorëve.....	123
7.16. Zbatimi i prodhimit të përzier të vektorëve	126
7.17. Prodhimi i përzier i vektorëve në formën koordinative	128
DETYRA PËR PËRSËRITJE	132

8.MATRICAT	134
8.1. Determinantët e rendit të dytë.....	134
8.2. Determinantët e rendit të tretë.....	136
8.3. Vetitë e determinantëve të rendit të tretë....	140
8.4. Sistem prej barazimeve lineare me tre të panjohura	145
8.5. Koncepti për matricë	149
8.6. Mbledhja dhe zbritja e matricave. Shumëzimi i matricës me numër.....	153
8.7. Shumëzimi i matricave	156
8.8. Matrica inverse	159
8.9. Barazimet e matricës.....	162
8.10. Prezantimi i matricës së sistemit prej tre barazimeve lineare me tre të panjohura	166
8.11. Metoda e Gausit të eliminimit	170
DETYRA PËR PËRSËRITJE	175

9. FUNKSIONE ELEMENTARE. VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT	178
9.1. Funksioni real	178
9.2. Funksioni linear	183
9.3. Funksioni katror	185
9.4. Funksionet e fuqive	189
9.5. Funksioni eksponencial	193
9.6. Funksioni logaritmik	198
9.7. Funksioni invers	201
9.8. Koncepti për vargun	204
9.9. Kufiri i vargut	207
9.10. Njehsimi i kufirit të vargjeve konvergjente	212
9.11. Vijueshmëria e funksionit	214
9.12. Vlera kufitare e funksionit	216
9.13. Vlerat kufitare të veçanta	224
9.14. Asimptotat e funksionit... ..	226
DETYRA PËR PËRSËRITJE	229

Përgjigje, udhëzime dhe zgjidhjet e detyrave.....	231
--	------------

